ΛΥΣΗ

α)

i. Είναι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{lnx}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(lnx)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1$$

ii. Είναι $f(x)=f(x)\cdot\frac{x-1}{lnx}\cdot\frac{lnx}{x-1}=\frac{f(x)(x-1)}{lnx}\cdot\frac{lnx}{x-1}$. Άρα

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)(x-1)}{lnx}\cdot\frac{lnx}{x-1}\right)=\left(\lim_{x\to 1}\frac{f(x)(x-1)}{lnx}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 1}\frac{lnx}{x-1}\right)$$

Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=0\cdot 1=0$$

Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη, επομένως είναι

$$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)\Leftrightarrow f(1)=0.$$

<u>2$^{ος}$ τρόπος</u>:

Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη, επομένως είναι

$$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1).$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to 1}f(x)=0.$$

Θεωρούμε συνάρτηση $g$ με $g(x)=\frac{f(x)(x-1)}{lnx}$, οπότε είναι

$$f(x)=\frac{g(x)\,lnx}{x-1}\ ,\ x\in(0,1)\cup(1,+\infty).$$

Επειδή είναι

$$\lim_{x\to 1}g(x)=0 \text{ και } \lim_{x\to 1}\frac{lnx}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(lnx)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1, \text{ έχουμε:}$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}g(x)\cdot\lim_{x\to 1}\frac{lnx}{x-1}=0\cdot 1=0.$$

β) Το 1 είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$, διότι $f(1)=0$.

Επιπλέον, επειδή $f'(x) = \sqrt{x^2+1} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και ως εκ τούτου είναι «1 − 1». Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία το πολύ ρίζα. Συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα, το 1.

γ) Η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $f(1) = 0$. Επομένως, έχουμε:

- $x > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 0$
- $x < 1 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0$

δ) Είναι $f(x) \leq 0, x \in [0,1]$. Επομένως

$$E = \int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 -f(x)dx = -\int_0^1 1 \cdot f(x)dx = -\int_0^1 (x)' \cdot f(x)dx =$$

$$= -[xf(x)]_0^1 + \int_0^1 x \cdot f'(x)dx = -[xf(x)]_0^1 + \int_0^1 x \cdot \sqrt{x^2+1}\,dx =$$

$$= -[xf(x)]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 2x \cdot (x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= -[xf(x)]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)^{\frac{1}{2}} \cdot (x^2+1)'dx =$$

$$= -[xf(x)]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\big(1 \cdot 0 - 0 \cdot f(0)\big) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\big(2\sqrt{2} - 1\big).$$

<u>Σχόλιο</u>: Εναλλακτικά για τον υπολογισμό του $\int_0^1 x \cdot \sqrt{x^2+1}\,dx$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο αντικατάστασης, θέτοντας $u = \sqrt{x^2+1}$.