

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)(x-1)}{\ln x} = 0 \text{ και}$$

$$f'(x) = \sqrt{x^2 + 1} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α)

i. Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$$

(Μονάδες 03)

ii. Να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$.

(Μονάδες 03)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα.

(Μονάδες 06)

γ) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 06)

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου E , που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και των ευθειών $x = 0$ και $x = 1$.

(Μονάδες 07)