ΛΥΣΗ

α) i) Η τετμημένη της κορυφής Α είναι α και αν $x_Δ$ είναι η τετμημένη της κορυφής Δ, τα μήκη των πλευρών ΑΒ και ΔΓ του ορθογωνίου θα είναι $(ΑΒ) = e^{α}$ και $(ΔΓ) = \frac{e}{x_Δ}$.

Όμως $(ΑΒ) = (ΔΓ)$, άρα

$$e^{α} = \frac{e}{x_Δ} \quad ή \quad x_Δ = \frac{e}{e^{α}} \quad ή \quad x_Δ = e^{1-α} .$$

ii) Είναι $(ΑΔ) = |x_Δ - x_Α| = x_Δ - x_Α = e^{1-α} - α$ και $(ΑΒ) = e^{α}$, οπότε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι $Ε(α) = (ΑΒ) \cdot (ΑΔ) = e^{α}(e^{1-α} - α\ ) = e - αe^{α}, α < 1$.

β) Για κάθε $α < 1$ είναι

$$Ε'(α) = (e - αe^{α})' = -e^{α} - αe^{α} = -e^{α}(α + 1),$$

οπότε $Ε'(α) \geq 0 \Leftrightarrow -e^{α}(α + 1) \geq 0 \Leftrightarrow α + 1 \leq 0 \Leftrightarrow α \leq -1$.

Η ρίζα και το πρόσημό της $Ε'(α)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τη μέγιστη τιμή της $Ε(α)$.

α	$-\infty$		-1		1
$\mathbf{E'(\alpha)}$		$+$	0	$-$	
$\mathbf{E(\alpha)}$		$\nearrow$	$e + \frac{1}{e}$ **max**	$\searrow$	

Επομένως η μέγιστη τιμή του εμβαδού του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $Ε(-1) = e + \frac{1}{e}$.

γ) Είναι

$$\lim_{α \to 1} Ε(α) = \lim_{α \to 1}(e - αe^{α}) = 0$$

και

$$\lim_{α \to -\infty} Ε(α) = \lim_{α \to -\infty}(e - αe^{α}) = e + \lim_{α \to -\infty}(-αe^{α}) = e + 0 = e,$$

αφού $\lim_{α \to -\infty}(-αe^{α}) = \lim_{α \to -\infty} \frac{-α}{e^{-α}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{\text{de l' Hospital}}{=}} \lim_{α \to -\infty} \frac{(-α)'}{(e^{-α})'} = \lim_{α \to -\infty} \frac{1}{e^{-α}} = \lim_{α \to -\infty} e^{α} = 0$.

Η $Ε(α)$ είναι συνεχής στα διαστήματα $Δ_1 = (-\infty\,, -1]$ και $Δ_2 = (-1\,, 1)$ και επειδή είναι γνησίως αύξουσα στο $Δ_1$ και γνησίως φθίνουσα στο $Δ_2$, θα είναι

$$f\,(Δ_1) = \left(e\,,\ e + \frac{1}{e}\right],$$

$$f\,(Δ_2) = \left(0\,,\ e + \frac{1}{e}\right).$$

Το 1 ανήκει μόνο στο διάστημα $f(\Delta_2)$ άρα η εξίσωση $E(\alpha) = 1$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο Δ_2 και καμία στο Δ_1. Επιπλέον η συνάρτηση E είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_2, άρα υπάρχει ακριβώς μια ρίζα της $E(\alpha) = 1$.

Επομένως υπάρχει ακριβώς μία τιμή του α, η οποία ανήκει στο διάστημα $\Delta_2 = (-1\,,1)$, για την οποία το εμβαδόν του $AB\Gamma\Delta$ γίνεται ίσο με 1.