ΛΥΣΗ

α)

Είναι $g(x)=-x+1$, οπότε $g'(x)=(-x+1)'=-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Επειδή η ευθεία $y=g(x)=-x+1$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1\ ,\ f(-1))$ θα είναι

$$f(-1)=g(-1)=2 \text{ και } f'(-1)=g'(-1)=-1\ .$$

β)

i) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $D_f=(-\infty\ ,0)$, ενώ η g το $D_g=\mathbb{R}$.

Για να ορίζεται η παράσταση $f(g(x))$ πρέπει:

$x\in D_g$ και $g(x)\in D_f$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ g(x)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ -x+1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$$

Επομένως, ορίζεται η fog και το πεδίο ορισμού της είναι το $D_{fog}=(1\ ,+\infty\ )$.

Για να ορίζεται η παράσταση $g(f(x))$ πρέπει:

$x\in D_f$ και $f(x)\in D_g$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{cases} x<0 \\ f(x)\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x<0.$$

Επομένως, ορίζεται η gof και το πεδίο ορισμού της είναι το $D_{gof}=(-\infty\ ,0)$.

ii) Είναι $g(2)=-2+1=-1$, $g'(2)=-1$, $f(-1)=2$ και $f'(-1)=-1$.

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_1=2$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(2)$, άρα η συνάρτηση fog θα είναι παραγωγίσιμη στο $x_1=2$ με

$$(fog)'(2)=f'\big(g(2)\big)\cdot g'(2)=f'(-1)\cdot(-1)=(-1)\cdot(-1)=1\ .$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=-1$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο $f(-1)$, άρα η συνάρτηση gof θα είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=-1$ με

$$(gof)'(-1)=g'\big(f(-1)\big)\cdot f'(-1)=g'(2)\cdot(-1)=(-1)\cdot(-1)=1.$$

γ)

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_{fog} στο σημείο της με τετμημένη $x_1=2$ είναι

$$\varepsilon_1: y-(fog)(2)=(fog)'(2)\cdot(x-2).$$

Είναι

$$(fog)(2)=f(g(2))=f(-1)=2 \text{ και } (fog)'(2)=1\ ,$$

άρα

$$\varepsilon_1 : y - 2 = 1 \cdot (x - 2)$$

$$y = x\,.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_{gof} στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = -1$ είναι

$$\varepsilon_0 : y - (gof)(-1) = (gof)'(-1) \cdot (x + 1)$$

Είναι

$$(gof)(-1) = g(f(-1)) = g(2) = -1 \quad \text{και} \quad (gof)'(-1) = 1$$

άρα

$$\varepsilon_0 : y + 1 = 1 \cdot (x + 1)$$

$$y + 1 = x + 1$$

$$y = x$$

Επομένως οι ευθείες ε_1 και ε_0 ταυτίζονται, δηλαδή η ευθεία με εξίσωση $y = x$ είναι κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων fog και gof .