ΛΥΣΗ

α) i. Η συνάρτηση $\mathrm{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 2$, οπότε από το θεώρημα του Fermat θα είναι $f'(2) = 0$. Δίνεται επίσης ότι $f(2) = -32$. Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο με τετμημένη $x_1 = 2$, είναι η

$$y - f(2) = f'(2)(x-2)$$
$$y + 32 = 0(x-2)$$
$$y = -32.$$

ii. Οι γραφικές παραστάσεις της f και της $f'$ τέμνονται στο σημείο $A(-2\,,0)$, άρα $f(-2) = 0$ και $f'(-2) = 0$. Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο με τετμημένη $x_2 = -2$, είναι η

$$y - f(-2) = f'(-2)(x+2)$$
$$y - 0 = 0(x+2)$$
$$y = 0.$$

β) i. Στο (α) ερώτημα βρήκαμε $f'(2) = f'(-2) = 0$ και επειδή η $f'$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση 2[ου] βαθμού, θα έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1 = 2$ και $x_2 = -2$. Επομένως είναι

$$f'(x) = \alpha(x - x_1)(x - x_2) = \alpha(x-2)(x+2) = \alpha(x^2 - 4) = \alpha x^2 - 4\alpha, \text{ με } \alpha \neq 0.$$

Η γραφική παράσταση της $f'$ διέρχεται από το σημείο $B(0\,,-12)$, άρα είναι $f'(0) = -12$, οπότε $\alpha \cdot 0^2 - 4\alpha = -12$ ή $\alpha = 3$.

Επομένως είναι

$$f'(x) = 3x^2 - 12,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 3x^2 - 12 = (x^3 - 12x)'$, άρα $f(x) = x^3 - 12x + c\,,\ c \in \mathbb{R}$.

Όμως

$$f(2) = -32$$
$$\text{ή } 8 - 24 + c = -32$$
$$\text{ή } c = -16.$$

Επομένως θα είναι

$$f(x) = x^3 - 12x - 16\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

iii. Οι ρίζες της $f'$ είναι οι $x_1 = -2\,,\ x_2 = 2$ και το πρόσημο της $f'$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f. Επίσης είναι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^3 - 12x - 16) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

και $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^3 - 12x - 16) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty.$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $-\infty$ | ↗ | $0$<br>Τ.Μ. | ↘ | $-32$<br>Τ.Ε. | ↗ | $+\infty$ |

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $\Delta_1 = (-\infty\,, -2]$ , $\Delta_2 = [-2\,, 2]$ , $\Delta_3 = [2\,, +\infty)$ και επειδή είναι γνησίως αύξουσα στα $\Delta_1$ , $\Delta_3$ και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2$ , θα είναι $f\,(\Delta_1) = (-\infty\,, 0]$ , $f\,(\Delta_2) = [-32\,, 0]$ και $f\,(\Delta_3) = [-32\,, +\infty)$.

Το $-20$ ανήκει στα διαστήματα $f\,(\Delta_1)$ , $f\,(\Delta_2)$ και $f\,(\Delta_3)$, άρα η εξίσωση $f(x) = -20$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $\Delta_1$ , $\Delta_2$ και $\Delta_3$.

Επιπλέον η f είναι γνησίως μονότονη στα $\Delta_1$ , $\Delta_2$ και $\Delta_3$, άρα υπάρχει ακριβώς μια ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $\Delta_1$ , $\Delta_2$ και $\Delta_3$.

Άρα, η εξίσωση $f(x) = -20$ έχει ακριβώς τρεις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.