ΛΥΣΗ

α) Η ημιευθεία $AB$ έχει εξίσωση

$$y-(-2)=\frac{-2-2}{0-1}\ (x-0)\ \text{ ή }\ y=4x-2,\ x\geq 0.$$

Για $y=0$ έχουμε $0=4x-2$ ή $x=\frac{1}{2}$,

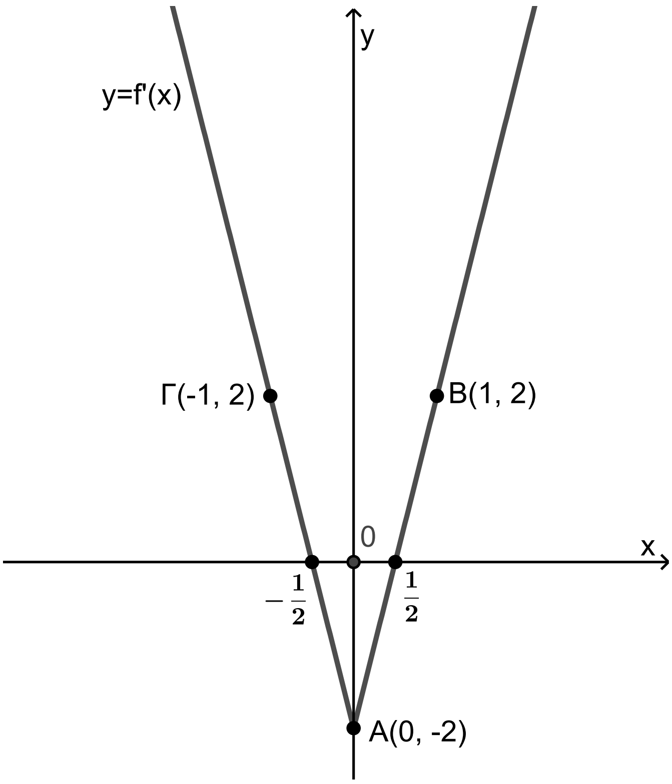
άρα η ημιευθεία $AB$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\left(\frac{1}{2}\ ,0\right)$.

Η ημιευθεία $A\Gamma$ έχει εξίσωση

$$y-(-2)=\frac{-2-2}{0+1}\ (x-0)\ \text{ ή }\ y=-4x-2, x\leq 0.$$

Για $y=0$ έχουμε $0=-4x-2$ ή $x=-\frac{1}{2}$,

άρα η ημιευθεία $A\Gamma$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\left(-\frac{1}{2}\ ,0\right)$.




β) Από τη γραφική παράσταση της παραγώγου $f'$ έχουμε:

Οι ρίζες της $f'$ είναι οι $x_1=-\frac{1}{2}$ και $x_2=\frac{1}{2}$. Επίσης είναι $f'(x)>0$ στα διαστήματα $\left(-\infty\ ,\ -\frac{1}{2}\right)$ και $\left(\frac{1}{2}\ ,+\infty\ \right)$ και $f'(x)<0$ στο διάστημα $\left(-\frac{1}{2}\ ,\frac{1}{2}\right)$.

Οι ρίζες και το πρόσημο της $f'$ καθώς και η μονοτονία και τα ακρότατα της $f$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f$ | | $\nearrow$ | Τ.Μ. | $\searrow$ | Τ.Ε. | $\nearrow$ | |

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα θα είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty\, ,\, -\frac{1}{2}\right]$ και $\left[\frac{1}{2}\, ,+\infty\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{1}{2}\, ,\, \frac{1}{2}\right]$.

γ) Η f παρουσιάζει στο $x_1 = -\frac{1}{2}$ τοπικό μέγιστο και στο $x_2 = \frac{1}{2}$ τοπικό ελάχιστο.

δ) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $\Delta(1{,}0)$, οπότε $f(1) = 0$ . Η γραφική παράσταση της παραγώγου $f\,'$ διέρχεται από το σημείο $B(1\, ,2)$ οπότε $f\,'(1) = 2$ .

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο $\Delta(1\, ,0)$ είναι

$$\varepsilon : y - f(1) = f\,'(1)(x-1)$$

$$\varepsilon : \; y - 0 = 2(x-1)$$

$$\varepsilon : \; y = 2x - 2\ .$$

Η ε διέρχεται από το σημείο $A(0\, ,-2)$ αφού $-2 = 2 \cdot 0 - 2$, άρα η ευθεία ΑΔ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\Delta(1\, ,0)$.