ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = [1\,,+\infty)$.

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, θα είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$

οπότε θα ισχύει $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$ ή $\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{\lambda x+1}} = 0$ (1).

Αν $\lambda \neq -1$ τότε $\lambda + 1 \neq 0$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{\lambda x+1}} = e^{\frac{1}{\lambda+1}} > 0$, που είναι άτοπο λόγω της (1).

Αν $\lambda = -1$ τότε $\lim\limits_{x\to 1^+} (\lambda x + 1) = \lim\limits_{x\to 1^+} (1 - x) = 0$ και $1 - x < 0$ για κάθε $x > 1$, άρα

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{\lambda x+1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x} = -\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{\lambda x+1}} = \lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{1-x}} = 0$.

Επομένως $\lambda = -1$.

β) Για $\lambda = -1$ έχουμε $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{1-x}}, & x > 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$.

Για κάθε $x > 1$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \left(e^{\frac{1}{1-x}}\right)' = e^{\frac{1}{1-x}} \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)' = e^{\frac{1}{1-x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$.

Στο $x_0 = 1$ έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{e^{\frac{1}{1-x}}-0}{x-1}$ (2).

Θέτουμε $\frac{1}{1-x} = u$ οπότε $\lim\limits_{x\to 1^+} u = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x} = -\infty$ και το όριο (2) γίνεται

$$\lim_{u\to -\infty} (-ue^{u}) = \lim_{u\to -\infty} \frac{-u}{e^{-u}} \underset{\text{de l' Hospital}}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{u\to -\infty} \frac{(-u)'}{(e^{-u})'} = \lim_{u\to -\infty} \frac{1}{e^{-u}} = \lim_{u\to -\infty} e^{u} = 0.$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = 0$.

Επομένως

$$f'(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{1-x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}, & x > 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}.$$

γ) Λόγω του ερωτήματος (β), για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) = e^{\frac{1}{1-x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} > 0$ και επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο $A = [1\,,+\infty)$.

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A = [1\,,+\infty)$ θα παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ ελάχιστο το $f(1) = 0$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{1-x}} = 1$, αφού $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{1-x} = 0$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $A = [1\,,+\infty)$, το σύνολο τιμών της θα είναι το

$$f(A) = [f(1)\,, \lim_{x\to +\infty} f(x)) = [0\,,1).$$