ΛΥΣΗ

α)

i. Η f ορίζεται στο R, είναι συνεχής για x<2 ως σταθερή και για x>2 ως πράξεις συνεχών. Θα εξετάσουμε αν είναι συνεχής στο x_0=2.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(-1) = -1$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(e^{x-2} - 2) = e^0 - 2 = -1$$

και $f(2) = -1$.

Άρα η f είναι συνεχής στο x_0=2.

Η f είναι παραγωγίσιμη για x<2 με $f'(x) = 0$, ως σταθερή και για x>2 ως πράξεις παραγωγίσιμων με $f'(x) = e^{x-2}(x-2)' = e^{x-2} > 0$, για κάθε x>2.

Άρα η f είναι σταθερή με $f(x) = -1$ στο $(-\infty, 2)$, γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$ και συνεχής στο 2. Οπότε για $x \geq 2 \Leftrightarrow f(x) \geq f(2) \Leftrightarrow f(x) \geq -1$.

Οπότε ισχύει ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R-{2} ως πολυωνυμική με $g'(x) = -x + 2$

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow -x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, απορρίπτεται γιατί $2 \notin A_g$
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow -x + 2 > 0 \Leftrightarrow x < 2$
- $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 2$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(2, +\infty)$.

– Αν $\Delta_1 = (-\infty, 2)$ τότε $g(\Delta_1) = (\lim_{x\to -\infty} g(x), \lim_{x\to 2^-} g(x)) = (-\infty, -1)$

γιατί η g είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\infty, 2)$ με

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty}\left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3\right) = \lim_{x\to -\infty}\left(-\frac{1}{2}x^2\right) = -\infty$$

και

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3\right) = -2 + 4 - 3 = -1$$

– Αν $\Delta_2 = (2, +\infty)$ τότε $g(\Delta_2) = (\lim_{x\to +\infty} g(x), \lim_{x\to 2^+} g(x)) = (-\infty, -1)$

γιατί η g είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(2, +\infty)$ με

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(-\frac{1}{2}x^2\right) = -\infty$$

και

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3\right) = -2 + 4 - 3 = -1$$

Οπότε το σύνολο τιμών της g είναι το $g(\Delta_1) \cup g(\Delta_2) = (-\infty, -1)$, δηλαδή οι τιμές της g είναι μικρότερες του -1 για κάθε $x \neq 2$.

β) Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g στο κοινό πεδίο ορισμού τους το $\mathbb{R} - \{2\}$, αφού $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από το α)i. ερώτημα και $g(x) < -1$ για κάθε $x \neq 2$ από το α)ii. ερώτημα.

γ) Παρατηρούμε ότι για τις συναρτήσεις του ερωτήματος α) και για $x_0 = 2$, ισχύει ότι

$f(x) > g(x)$ κοντά στο 2,

ενώ

$\lim_{x\to 2} f(x) = -1$ από τη συνέχεια της f που εξετάστηκε στο α) ερώτημα και

$\lim_{x\to 2} g(x) = -1$, από το β) ερώτημα.

Ο ισχυρισμός «Αν $f(x) > g(x)$ κοντά στο x_0, τότε και $\lim_{x\to x_0} f(x) > \lim_{x\to x_0} g(x)$» είναι τελικά ψευδής.

Το αποτέλεσμα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.