ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x > 0$, έχουμε $f'(x) = a\left[(x)' \cdot e^{-\beta x} + x\left(e^{-\beta x}\right)'\right] = a\left[e^{-\beta x} + x(-\beta x)' \cdot e^{-\beta x}\right]$

$= \alpha \cdot e^{-\beta x} \cdot (1 - \beta x)$.

Έχουμε: $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \beta x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{\beta}$, οπότε παίρνουμε τον παρακάτω πίνακα.

x	0	$\frac{1}{\beta}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\nearrow$	Ο.Μ.	$\searrow$

Επομένως όταν ο τρέχων πληθυσμός είναι $x = \frac{1}{\beta}$, τότε ο πληθυσμός την αμέσως επόμενη χρονιά θα πάρει την μεγαλύτερη δυνατή τιμή, ίση με $f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{\alpha}{\beta e}$.

β) Καθώς θέλουμε να προσεγγίσουμε τον πληθυσμό y των ψαριών, όταν την αμέσως προηγούμενη χρονιά, ο πληθυσμός είναι απεριόριστα μεγάλος, ζητάμε το

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \alpha \frac{x}{e^{\beta x}}$$

και παρατηρούμε ότι έχουμε απροσδιοριστία $\frac{+\infty}{+\infty}$. Ελέγχουμε αν υπάρχει το

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x)'}{(e^{\beta x})'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\beta e^{\beta x}}$$

το οποίο ισούται με μηδέν.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ από τον κανόνα De L' Hospital, κάτι που σημαίνει ότι αν ο πληθυσμός κάποια χρονιά είναι απεριόριστα μεγάλος, την αμέσως επόμενη χρονιά ο πληθυσμός των ψαριών πρακτικά θα εξαφανιστεί.

γ) Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού, θα έχουμε:

$F(\beta) - F(2\beta) = \int_{2\beta}^{\beta} f(x)dx = a\int_{2\beta}^{\beta} xe^{-\beta x}dx = a\int_{2\beta}^{\beta} x \cdot \left(-\frac{1}{\beta}e^{-\beta x}\right)' dx =$

$= \alpha\left\{\left[-\frac{x}{\beta}e^{-\beta x}\right]_{2\beta}^{\beta} - \int_{2\beta}^{\beta}(x)' \cdot \left(-\frac{1}{\beta}e^{-\beta x}\right)dx\right\} = a\left\{-\frac{1}{e^{\beta^2}} + \frac{2}{e^{2\beta^2}} + \frac{1}{\beta}\int_{2\beta}^{\beta} e^{-\beta x}dx\right\} =$

$\alpha\left\{\frac{2-e^{\beta^2}}{e^{2\beta^2}} + \frac{1}{\beta}\left[-\frac{1}{\beta}e^{-\beta x}\right]_{2\beta}^{\beta}\right\} = a\left[\frac{2-e^{\beta^2}}{e^{2\beta^2}} - \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{e^{\beta^2}} - \frac{1}{e^{2\beta^2}}\right)\right] = a\left(\frac{2-e^{\beta^2}}{e^{2\beta^2}} - \frac{e^{\beta^2}-1}{\beta^2 e^{2\beta^2}}\right) =$

$a\frac{\beta^2\left(2-e^{\beta^2}\right)-e^{\beta^2}+1}{\beta^2 e^{2\beta^2}} = \frac{\alpha}{\beta^2} \cdot \frac{2\beta^2+1-(1+\beta^2)e^{\beta^2}}{e^{2\beta^2}}$.