ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, άρα και στο κλειστό διάστημα [1,2] ως αθροίσματα γινομένων πολυωνυμικής με εκθετική και λογαριθμική.

- $f(1) = (1-2)e^1 + (1-1)ln1$ = -e < 0
- $f(2) = (2-2)e^2 + (2-1)ln2$ = ln2>0 γιατί 1<2, οπότε ln1<ln2, αφού η lnx είναι συνάρτηση γνησίως αύξουσα στο (0, +∝) και επειδή ln1=0, έχουμε ότι ln2>0.

Άρα $f(1)\cdot f(2)$ < 0, επομένως από Θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (1,2)$, δηλαδή η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x'x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1,2)$.

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, ως αθροίσματα γινομένων πολυωνυμικής με εκθετική και λογαριθμική, με

$$f'(x) = e^x + (x-2)e^x + lnx + \frac{x-1}{x}$$

$$= e^x(1+x-2) + lnx + \frac{x-1}{x}$$

$$= e^x(x-1) + lnx + \frac{x-1}{x} >=0$$

$$= (x-1)\left(e^x + \frac{1}{x}\right) + lnx.$$

Για να υπάρχει μοναδικό σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη ευθεία θα είναι οριζόντια, δηλαδή παράλληλη στον x'x, θα πρέπει η εξίσωση $f'(x) = 0$ να έχει μοναδική ρίζα.

Παρατηρούμε ότι το 1 είναι προφανής ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$, αφού

$f'(1) = (1-1)(e+1) + ln1 = 0.$

- $f'(x) > 0$ γιατί για $x > 1$ είναι $lnx > 0$ και $(x-1)\left(e^x + \frac{1}{x}\right) > 0$, αφού $\left(e^x + \frac{1}{x}\right) > 0$ για κάθε $x > 0$ και
- $f'(x) < 0$ γιατί για $0 < x < 1$ είναι $lnx < 0$ και $(x-1)\left(e^x + \frac{1}{x}\right) < 0$

Κάνοντας τον πίνακα προσήμου της f' έχουμε:

x	0	1	+∝
f'	-	+	
f	↘	↗	

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο (0,1] και γνησίως αύξουσα στο [1,+∝).

Επομένως,

Αν Δ_1=(0,1], τότε $f(\Delta_1) = [f(1), \lim_{x\to 0} f(x))$ = [-e,+∝)

Γιατί:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}[(x-2)e^x + (x-1)lnx] = +\infty$$

Αφού $\lim_{x\to 0}(x-2)e^x = 2e^0 = -2$ και $\lim_{x\to 0}\ (x-1)lnx = -1(-\infty) = +\infty$

Αν Δ_2=$[1,+\infty)$, τότε $f(\Delta_2) = [f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)]$ = [-e,+∝)

Γιατί:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}[(x-2)e^x + (x-1)lnx] = +\infty$$

Αφού $\lim_{x\to+\infty}(x-2)e^x = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}(x-1)\cdot lnx = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$=

Το 0 ∈[-e,+∝) = $f(\Delta_1)$, άρα υπάρχει ένα x_1 ∈ (0,1] τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$, το οποίο είναι και μοναδικό γιατί η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,1].

Το 0 ∈[-e,+∝) = $f(\Delta_2)$, άρα υπάρχει ένα x_2 ∈ [1,+∝) τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$, το οποίο είναι επίσης μοναδικό γιατί η f είναι γνησίως αύξουσα στο [1,+∝).

Επομένως, η γραφική παράσταση της f τέμνει πράγματι τον άξονα x'x σε δύο ακριβώς σημεία τα x_1 και x_2 και το x_2 είναι το x_0 του α) ερωτήματος.