ΛΥΣΗ

α) Έστω x_1, $x_2 \in [0,2]$ με $x_1 < x_2$. Τότε:

$$x_1 < x_2$$
$$\Rightarrow x_1^2 < x_2^2$$
$$\Rightarrow -x_1^2 > -x_2^2$$
$$\Rightarrow 4 - x_1^2 > 4 - x_2^2$$
$$\Rightarrow \sqrt{4 - x_1^2} > \sqrt{4 - x_2^2}$$
$$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,2].

β)

i. Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο [0,2] ως τετραγωνική ρίζα πολυωνυμικής, άρα για το σύνολο τιμών της έχουμε ότι:

$f([0,2]) = [f(2), f(0)] = [0,2]$, αφού $f(2) = \sqrt{4-2^2} = 0$ και $f(0) = \sqrt{4-0} = \sqrt{4} = 2$

ii. Αποδείξαμε στο α) ερώτημα ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο [0,2], οπότε είναι και 1-1, άρα αντιστρέφεται. Δηλαδή ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

iii. Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f. Άρα $A_{f^{-1}}$ = [0,2] . Θα προσδιορίσουμε επίσης, τον τύπο της συνάρτησης f^{-1}, λύνοντας την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς $x \in [0,2]$.

$$y = f(x)$$
$$\text{Άρα } y = \sqrt{4 - x^2}$$
$$\text{ή } y^2 = 4 - x^2$$
$$\Rightarrow x^2 = 4 - y^2$$
$$\Rightarrow |x| = \sqrt{4 - y^2}$$

και επειδή x μη αρνητικό, έχουμε $x = \sqrt{4 - y^2}$

Άρα $A_{f^{-1}}$ = [0,2] = A_f και $f^{-1}(x) = \sqrt{4 - x^2} = f(x)$ για κάθε $x \in [0,2]$, οπότε οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.