ΛΥΣΗ

α) Για x<2 έχουμε $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, οπότε:

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}(x+2) = 4$

Για x>2 έχουμε $f(x) = \alpha x^2 - 4$, οπότε:

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(\alpha x^2 - 4) = 4\alpha - 4$

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$ και επειδή $f(2) = 4\alpha - 4$ και λόγω του α) ερωτήματος έχουμε 4α – 4 = 4 ή 4α = 8. Άρα τελικά α = 2.

γ) Για α = 2 η συνάρτηση f γίνεται: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, \alpha\nu\ x < 2 \\ 2x^2-4, \alpha\nu\ x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}, \alpha\nu\ x < 2 \\ 2x^2-4, \alpha\nu\ x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} x+2, \alpha\nu\ x < 2 \\ 2x^2-4, \alpha\nu\ x \geq 2 \end{cases}$

Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$.

Για x<2: $\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{x+2-4}{x-2} = 1$. Άρα $\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 1$ (1)

Για x>2: $\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{2x^2-4-4}{x-2} = \frac{2(x^2-4)}{x-2} = \frac{2(x-2)(x+2)}{x-2} = 2x+4$.

Άρα $\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}(2x+4) = 8$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι $\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \neq \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$, άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (-∞,2) και στο (2,+∞) ως πολυωνυμική με

$f'(x) = \begin{cases} 1, \alpha\nu\ x < 2 \\ 4x, \alpha\nu\ x > 2 \end{cases}$