

ΛΥΣΗ




α) Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f' συμπεραίνουμε ότι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 3$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0,3)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$$

Τα πρόσημα της παραγώγου της f φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$					

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[3, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,3]$, αφού είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

β) Αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(0, -1)$ και $B(3,2)$, τότε θα είναι:

$$f(0) = -1 \text{ και } f(3) = 2$$

Από τον πίνακα του ερωτήματος (α) προκύπτει ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 0$, το $f(0) = -1$, και τοπικό μέγιστο για $x = 3$, το $f(3) = 2$.

γ) Αφού η f' είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, τότε η συνάρτηση f θα είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού. Έστω ότι:

$$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta, \alpha \neq 0$$

Τότε είναι:

$$f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$$

Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε ότι:

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0 \text{ και } f(0) = -1 \Leftrightarrow \delta = -1$$

Επίσης, είναι:

$$\begin{cases} f'(3) = 0 \\ f(3) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27\alpha + 6\beta = 0 \\ 27\alpha + 9\beta - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow 3\beta = 3 \Leftrightarrow \beta = 1 \text{ και } \alpha = -\frac{2}{9}$$

Επομένως, ο τύπος της συνάρτησης f είναι:

$$f(x) = -\frac{2}{9}x^3 + x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$$

δ) Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f στο $(0,3)$. Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(0,3) = A_2$, οπότε:

$$f(A_2) = f((0,3)) = (f(0), f(3)) = (-1,2)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- 1) Αν $\alpha \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$, τότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ δεν έχει λύση.
- 2) Αν $\alpha \in (-1,2)$, τότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει μία ακριβώς λύση, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,3)$.