ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)'=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$$

Λύνουμε την εξίσωση

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2}=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} x=1$$

Τα πρόσημα της παραγώγου της f φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Άρα, η συνάρτηση f είναι:

- γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, αφού είναι συνεχής στο $(0,1)$ και ισχύει $f'(x)<0$ στο $(0,1)$.
- γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)>0$ στο $(1,+\infty)$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και είναι συνεχής στο $x_o=1$. Επομένως, η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_o=1$, το $f(1)=2$.

β) Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f''(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)''=\frac{2}{x^3}>0 \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

Συνεπώς, η f είναι κυρτή, δηλαδή στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω, στο $(0,+\infty)$.

γ) Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Άρα, η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.