ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = ((x-1)^3 - 3x)' = 3(x-1)^2 - 3 = 3x^2 - 6x + 3 - 3 = 3x(x-2)$$

Λύνουμε την εξίσωση

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

Τα πρόσημα της παραγώγου της f φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Άρα, η συνάρτηση f είναι:

- γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, αφού είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και ισχύει $f'(x) > 0$ στο $(-\infty, 0)$.
- γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$, αφού είναι συνεχής στο $[0,2]$ και ισχύει $f'(x) < 0$ στο $(0,2)$.
- γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $[2, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) > 0$ στο $(2, +\infty)$.

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[2, +\infty)$, οπότε:

$$f\big([2, +\infty)\big) = \Big[f(2), \lim_{x \to -\infty} f(x)\Big) = [-5, +\infty)$$

διότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + 3x - 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$.

γ) Παρατηρούμε ότι $0 \in f\big([2, +\infty)\big)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα στο διάστημα $[2, +\infty)$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό.