ΛΥΣΗ

Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f έχουμε ότι πρέπει και αρκεί $x \geq 0$, άρα $A_f = [0,+\infty)$

για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g πρέπει και αρκεί $x > 0$, άρα $A_g = (0,+\infty)$.

α) Η συνάρτηση $f \cdot g$ ορίζεται στο σύνολο $A_{f \cdot g} = A_f \cap A_g = (0,+\infty)$ και είναι:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$$

β) Η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ ορίζεται στο σύνολο $A_{f/g} = \left\{x \in A_f \cap A_g \mid g(x) \neq 0\right\}$, είναι:

$$g(x) \neq 0 \Leftrightarrow \ln x \neq 0 \Leftrightarrow \ln x \neq \ln 1 \Leftrightarrow x \neq 1$$

άρα $A_{f/g} = (0,1) \cup (1,+\infty)$ και είναι:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$$

γ) Οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

$f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$ προσδιορίζονται από τις ρίζες της εξίσωσης

$$(f \cdot g)(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) \; (1),$$

που βρίσκονται στο σύνολο: $A = A_{f \cdot g} \cap A_{f/g} = (0,1) \cup (1,+\infty)$

$$\text{Από } (1) \Leftrightarrow \sqrt{x} \cdot \ln x = \frac{\sqrt{x}}{\ln x} \Leftrightarrow \sqrt{x} \cdot \ln^2 x = \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} \cdot \ln^2 x - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \cdot (\ln^2 x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} = 0 \\ \text{ή} \\ \ln^2 x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ή} \\ \ln^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ή} \\ \ln x = 1 \;\text{ ή }\; \ln x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ή} \\ x = e \;\text{ ή }\; x = e^{-1} \end{cases}$$

Ητιμή $x = 0$ απορρίπτεται αφού $0 \notin A$ <u>και</u> οι τιμές $x = e,\ x = e^{-1}$ είναι δεκτές, άρα οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$ είναι $x = e,\ x = e^{-1}$.