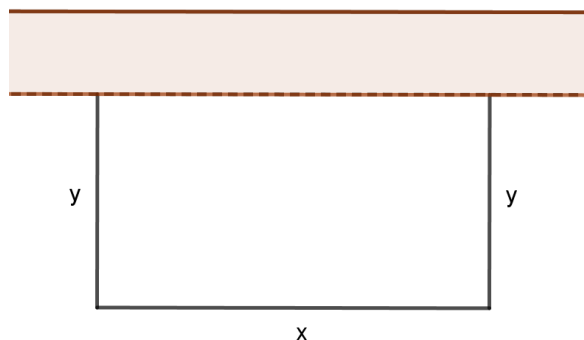


ΛΥΣΗ



α) Έστω y η άλλη διάσταση της ορθογώνιας περιοχής που έχουμε περιφράξει, με $x, y > 0$ (1) ως μήκη. Από τα δεδομένα θα ισχύει:

$$x + 2y = 400 \Leftrightarrow 2y = 400 - x \Leftrightarrow y = \frac{400 - x}{2} \quad (2).$$

Λόγω της (1) είναι:

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \end{array} \right\} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \left. \begin{array}{l} x > 0 \\ \frac{400 - x}{2} > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x > 0 \\ 400 - x > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x > 0 \\ x < 400 \end{array} \right\} \Leftrightarrow 0 < x < 400.$$

Το εμβαδό της ορθογώνιας περιοχής είναι: $E = x \cdot y$, η οποία λόγω της (2) γράφεται:

$$E = x \cdot \frac{400 - x}{2} = \frac{400x - x^2}{2} = 200x - \frac{1}{2}x^2 \quad \text{ή} \quad E(x) = 200x - \frac{1}{2}x^2 \quad \text{με} \quad 0 < x < 400.$$

β) Για $0 < x < 400$ η συνάρτηση $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη με

$$E'(x) = \left(200x - \frac{1}{2}x^2 \right)' = 200 - x.$$

Επίσης $E'(x) = 0 \Leftrightarrow 200 - x = 0 \Leftrightarrow x = 200$ και

$E'(x) > 0 \Leftrightarrow 200 - x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 200$, οπότε:

x	0	200	400
E'		+	-
E		↗	↘

Ο.Μ

Από τον παραπάνω πίνακα μεταβολών γίνεται φανερό ότι το εμβαδό $E(x)$ της περιφραγμένης περιοχής γίνεται μέγιστο για $x = 200$ μέτρα.

γ) Λόγω του ερωτήματος (β) η ζητούμενη μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι:

$$E(200) = 200 \cdot 200 - \frac{1}{2} \cdot 200^2 = 40000 - 20000 = 20000 \text{ τετραγωνικά μέτρα (ή 20}$$

στρέμματα).

δ) Λόγω του ερωτήματος (β) η συνάρτηση $E(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα

$$A = (0, 200] \text{ οπότε } E(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0} E(x), E(200) \right].$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 0} E(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(200x - \frac{1}{2}x^2 \right) = 0 \text{ και } E(200) = 20000.$$

Άρα $E(A) = (0, 20000]$ και $300 \cdot \pi \in E(A)$ γιατί:

$$0 < \pi < 4 \Rightarrow 300 \cdot 0 < 300 \cdot \pi < 300 \cdot 4 \Rightarrow 0 < 300 \cdot \pi < 1200 < 20000.$$

Οπότε θα υπάρχει $x_0 \in (0, 200)$ έτσι ώστε: $E(x_0) = 300 \cdot \pi$ και το x_0 αυτό είναι μοναδικό, λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης E στο διάστημα $(0, 200)$. Επομένως ο ισχυρισμός του Ιάσονα είναι αληθής.