ΛΥΣΗ



α) Έστω $y$ η άλλη διάσταση της ορθογώνιας περιοχής που έχουμε περιφράξει, με $x,y>0$ (1) ως μήκη. Από τα δεδομένα θα ισχύει:

$x+2y=400⇔2y=400-x⇔y=\frac{400-x}{2}$ (2).

Λόγω της (1) είναι:

$\left.\begin{array}{c}\&x>0\\\&y>0\end{array}\right\}\overset{(2)}{⇔}\left.\begin{array}{c}\&x>0\\\&\frac{400-x}{2}>0\end{array}\right\}⇔\left.\begin{array}{c}\&x>0\\\&400-x>0\end{array}\right\}⇔\left.\begin{array}{c}\&x>0\\\&x<400\end{array}\right\}⇔0<x<400.$

Το εμβαδό της ορθογώνιας περιοχής είναι: $Ε=x⋅y$, η οποία λόγω της (2) γράφεται:

$Ε=x⋅\frac{400-x}{2}=\frac{400x-x^{2}}{2}=200x-\frac{1}{2}x^{2}$ ή $Ε(x)=200x-\frac{1}{2}x^{2}$ με $0<x<400$.

β) Για $0<x<400$ η συνάρτηση $Ε(x)$ είναι παραγωγίσιμη με

$Ε'(x)=\left(200x-\frac{1}{2}x^{2}\right)'=200-x$.

Επίσης $Ε'(x)=0⇔200-x=0⇔x=200$ και

 $Ε'(x)>0⇔200-x>0⇔0<x<200$, οπότε:

 

Από τον παραπάνω πίνακα μεταβολών γίνεται φανερό ότι το εμβαδό $Ε(x)$ της περιφραγμένης περιοχής γίνεται μέγιστο για $x=200$ μέτρα.

γ) Λόγω του ερωτήματος (β) η ζητούμενη μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι:

$Ε(200)=200⋅200-\frac{1}{2}⋅200^{2}=40000-20000=20000$ τετραγωνικά μέτρα (ή 20

στρέμματα).

δ) Λόγω του ερωτήματος (β) η συνάρτηση $Ε(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Α = (0, 200] οπότε $Ε(Α)=\left.\lim\_{x\to 0}Ε(x),Ε(200)\right.$.

Όμως $\lim\_{x\to 0}Ε(x)$ $= \lim\_{x\to 0}\left(200x-\frac{1}{2}x^{2}\right)=0$ και $Ε(200)$ = 20000.

Άρα $Ε(Α)=\left.0,20000\right.$ και 300∙π$\in Ε(Α)$ γιατί:

$0<π<4⇒300⋅0<300⋅π<300⋅4⇒0<300⋅π<1200<20000$.

Οπότε θα υπάρχει $x\_{0}\in (0,200)$ έτσι ώστε: $Ε(x\_{0})=$ 300∙π και το $x\_{0}$ αυτό είναι μοναδικό, λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης $Ε$ στο διάστημα (0, 200). Επομένως ο ισχυρισμός του Ιάσονα είναι αληθής.