ΛΥΣΗ

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=(\ln x-x)'=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$,

οπότε $f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$ και $f'(x)>0 \Leftrightarrow x(1-x)>0 \Leftrightarrow 0<x<1$.

Έτσι:

x		0		1		$+\infty$
f'		‖	$+$		$-$	
f		‖	↗	O.M	↘	

Οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$. Στο $x_0=1$ εμφανίζει ολικό μέγιστο το $f(1)=-1$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x-x)=-\infty$, άρα η ευθεία $x=0$, δηλαδή ο άξονας $y'y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x-x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}-1\right)\underset{dL'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-1\right)=0-1=-1=\lambda$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-x+x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, οπότε στο $+\infty$ η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

Ακόμη $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-x)\overset{\infty-\infty}{=}\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x}-1\right)=(+\infty)(0-1)=-\infty$, επομένως στο $+\infty$ η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη. Άρα στο $+\infty$ η C_f δεν έχει ασύμπτωτη.

γ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $x^2+3>0,\ 2x^2+1>0,\ \frac{x^2+3}{2x^2+1}>0$ οπότε θα λύσουμε στο $\mathbb{R}$

την εξίσωση: $\ln\left(\frac{x^2+3}{2x^2+1}\right)=2-x^2 \Leftrightarrow \ln(x^2+3)-\ln(2x^2+1)=2-x^2$

$\Leftrightarrow \ln(x^2+3)-(x^2+3)=\ln(2x^2+1)-(2x^2+1) \Leftrightarrow f(x^2+3)=f(2x^2+1)$ (1).

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $x^2+3>1$, $2x^2+1\geq 1$ και λόγω του ερωτήματος (α), η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$ οπότε και '1-1'. Έτσι από την (1) $\Leftrightarrow$ $x^2+3=2x^2+1 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=-\sqrt{2}$ ή $x=\sqrt{2}$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης.