ΛΥΣΗ

α) Είναι: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^x = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}$ συνx = 1

$f(0) = 1$

οπότε ισχύει $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, επομένως η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

β) Είναι: $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^x-1}{x} \underset{DL'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{(e^x-1)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^x}{1} = 1$

$$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$$

Εφόσον τα δύο όρια διαφέρουν, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

γ) Για x > 0 η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη x = $\frac{\pi}{2}$ είναι (ε): $y - f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Όμως $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2} = 0$ και $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\eta\mu\dfrac{\pi}{2} = -1$

Οπότε (ε): $y = -\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ ή (ε): $y = -x + \dfrac{\pi}{2}$.