ΛΥΣΗ

α)

i. Ισχύει ότι $f^2(x) - 5 = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $f^2(x) = x^2 + 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5 = 0$, αδύνατο. Οπότε $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε η f διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Δίνεται ότι $f(2) = 3 > 0$, οπότε η συνάρτηση f παίρνει μόνο θετικές τιμές για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ισχύει $f^2(x) = x^2 + 5 \Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{x^2 + 5}$, και επειδή η f παίρνει μόνο θετικές τιμές για κάθε $x \in R$, θα ισχύει $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β)

i. Αν $g(x) = x^2 -$ συνx, με $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2x +$ ημx και $g''(x) = 2 +$ συνx για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $g''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού $1 \leq 2 +$ συνx ≤ 3, και η συνάρτηση $g'(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση g' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για $x < 0$ ισχύει $g'(x) < g'(0) = 0$, αφού η συνάρτηση g' είναι γνησίως αύξουσα, ενώ για $x > 0$ ισχύει $g'(x) > g'(0) = 0$. Άρα για τη συνάρτηση g έχουμε:

g συνεχής στο $(-\infty, 0]$ με $g'(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$. Αντίστοιχα

g συνεχής στο $[0, +\infty)$ με $g'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

(Η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 0 το $g(0) = -1$).

ii. Η εξίσωση $f^2(x) = 5 +$ συνx με $x \in \mathbb{R}$, γράφεται ισοδύναμα $x^2 + 5 = 5 +$ συνx $\Leftrightarrow$ $x^2 -$ συνx$=0 \Leftrightarrow g(x) = 0$ με $x \in \mathbb{R}$. Ζητείται να δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο ρίζες αντίθετες στο $(-\pi,\pi)$ και δεν έχει άλλες ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0,\pi]$, με

$g(\pi) = \pi^2 -$ συνπ $= \pi^2 + 1 > 0$

$g(0) = -$συν0 $= -1 < 0$

Η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0,\pi]$, οπότε η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα $\rho \in (0, \pi) \subset (0, +\infty)$. Επιπλέον η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$, οπότε η ρίζα ρ είναι μοναδική στο διάστημα αυτό.

Επειδή $g(-\rho) = (-\rho)^2 - συν(-\rho) = \rho^2 - συν\rho = g(\rho) = 0$, άρα και το $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$. Επειδή $0 < \rho < \pi \Leftrightarrow -\pi < -\rho < 0$, η ρίζα $-\rho$ της εξίσωσης $g(x)=0$ βρίσκεται στο διάστημα $(-\pi,0)$.

Επιπλέον η ρίζα $-\rho$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$ στο διάστημα $(-\infty, 0]$ αφού η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Άρα η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow x^2 - συνx=0 \Leftrightarrow f^2(x) = 5 + συνx$ με $x \in \mathbb{R}$ έχει ακριβώς δύο ρίζες αντίθετες μεταξύ τους οι οποίες ανήκουν στο διάστημα $(-\pi,\pi)$.