Λύση

α) Η $g(x)=e^{-x}f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγισίμων με $g'(x)=(e^{-x}f(x))'=e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=e^{-x}(f'(x)-f(x))>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αφού $f'(x)>f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $e^{-x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Συνεπώς η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x>0 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x)>g(0)\Rightarrow e^{-x}f(x)>e^{0}f(0)\Rightarrow e^{-x}f(x)>0 \overset{e^{-x}>0}{\Rightarrow} f(x)>0$.

Για κάθε $x<0 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x)<g(0)\Rightarrow e^{-x}f(x)<e^{0}f(0)\Rightarrow e^{-x}f(x)<0 \overset{e^{-x}>0}{\Rightarrow} f(x)<0$.

γ) Αφού $f(x)>0$ για κάθε $x>0$ από τη δοσμένη σχέση έχουμε ότι $f'(x)>f(x)>0$ για κάθε $x>0$ που σημαίνει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ άρα και 1-1 σε αυτό.

Είναι $|\eta\mu x|+1>0, |x|+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε η εξίσωση γίνεται

$$f(|\eta\mu x|+1)=f(|x|+1)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}|\eta\mu x|+1=|x|+1\Leftrightarrow|\eta\mu x|=|x|\Leftrightarrow x=0.$$

δ) Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E=\int_0^1|f(x)|dx$ και επειδή $f(x)>0$ για κάθε $x>0$ άρα και στο $[0,1]$ έχουμε $E=\int_0^1 f(x)dx$. Από τη δοσμένη σχέση έχουμε :

$$f'(x)>f(x)\Rightarrow f'(x)-f(x)>0\Rightarrow\int_0^1(f'(x)-f(x))dx>0\Rightarrow\int_0^1 f'(x)dx-\int_0^1 f(x)dx>0\Rightarrow$$

$$[f(x)]_0^1>E\Rightarrow f(1)-f(0)>E\Rightarrow E<f(1)$$