

#### ΘΕΜΑ 4

Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύει ότι  $f'(x) > f(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(0) = 0$ . Έστω επίσης η συνάρτηση  $g(x) = e^{-x} f(x)$ .

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι  $f(x) > 0$  για κάθε  $x > 0$  και  $f(x) < 0$  για κάθε  $x < 0$ .

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την εξίσωση  $f(|\eta\mu x| + 1) = f(|x| + 1)$ .

(Μονάδες 7)

δ) Αν  $E$  το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$  τον άξονα  $x'$  και τις ευθείες  $x = 0$  και  $x = 1$ , να αποδείξετε ότι  $E < f(1)$ .

(Μονάδες 6)