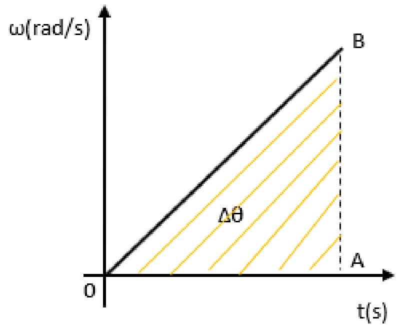
ΘΕΜΑ 4

4.1. Η τροχαλία, υπό την επίδραση της ροπής της δύναμης $\vec{F}$ εκτελεί στροφική ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική γωνιακή ταχύτητα. Για την κίνησή της ισχύει:

$$\alpha_\gamma = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{\omega-\omega_0}{t-t_0} \xRightarrow{\omega_0=0,\ t_0=0} \omega = \alpha_\gamma t \qquad (1)$$

Η γραφική παράσταση γωνιακής ταχύτητας-χρόνου είναι η επόμενη:



Το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου τριγώνου είναι αριθμητικά ίσο με την επίκεντρη γωνία που διαγράφει οποιαδήποτε επιβατική ακτίνα της τροχαλίας. Άρα,

$$\Delta\theta = (\text{OAB}) = \frac{1}{2}\text{βάση}\cdot\text{ύψος} = \frac{1}{2}\omega t = \frac{1}{2}\alpha_\gamma t^2 \qquad (2)$$

Όταν η τροχαλία έχει διαγράψει $\frac{4}{\pi}$ περιστροφές, τότε η επιβατική ακτίνα κάθε σημείου της έχει διαγράψει επίκεντρη γωνία ίση με

$$\Delta\theta = 2\pi N = 2\pi\cdot\frac{4}{\pi}\ \text{rad} = 8\ \text{rad}$$

Θα κάνουμε απαλοιφή του χρόνου από τις σχέσεις (1) και (2) για να υπολογίσουμε την γωνιακή επιτάχυνση. Λύνουμε την σχέση (1) ως προς τον χρόνο, δηλαδή $t = \frac{\omega}{\alpha_\gamma}$ και αντικαθιστούμε στην σχέση (2). Έχουμε:

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha_\gamma\left(\frac{\omega}{\alpha_\gamma}\right)^2 \Leftrightarrow \Delta\theta = \frac{\omega^2}{2\alpha_\gamma} \Leftrightarrow \alpha_\gamma = \frac{\omega^2}{2\Delta\theta} = \frac{8^2}{2\cdot 8}\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} = 4\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Μονάδες 6

4.2. Την χρονική στιγμή $t_1 = 3\text{s}$ η γωνιακή ταχύτητα κάθε σημείου της τροχαλίας δίνεται από την σχέση (1) και είναι:

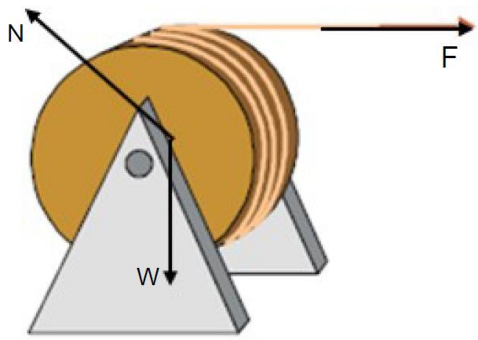
$$\omega_1 = \alpha_\gamma\cdot t_1 = 4\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\cdot 3\text{s} = 12\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Η γραμμική ταχύτητα στο ανώτερο σημείο της τροχαλίας έχει την ίδια διεύθυνση με το νήμα, φορά προς τα δεξιά και μέτρο

$$\upsilon_1 = \omega_1\cdot R = 12\frac{\text{rad}}{\text{s}}\cdot 0{,}3\text{m} = 3{,}6\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Μονάδες 6

4.3. Η τροχαλία δέχεται τρεις δυνάμεις, το βάρος της $\vec{W}$, την δύναμη $\vec{F}$ και την δύναμη στήριξης $\vec{N}$ από τον άξονα. Το βάρος $\vec{W}$ και η δύναμη $\vec{N}$ δεν ασκούν ροπή ως προς τον άξονα της τροχαλίας γιατί ο φορέας τους τέμνει τον άξονα περιστροφής (ο μοχλοβραχίονας είναι μηδέν).

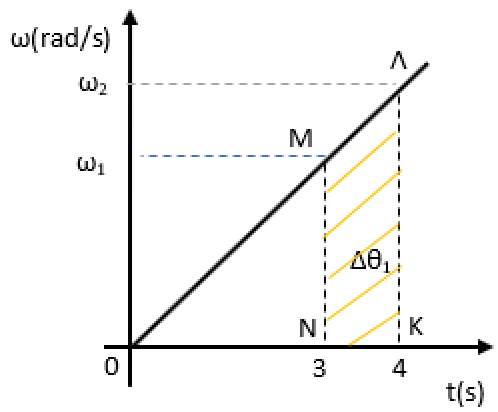


Ορίζοντας ως θετική φορά την φορά περιστροφής της τροχαλίας, η συνολική ροπή ως προς τον άξονα είναι

$$\Sigma\vec{\tau} = \vec{\tau}_{\vec{F}} + \vec{\tau}_{\vec{W}} + \vec{\tau}_{\vec{N}} \Leftrightarrow \Sigma\tau = F \cdot R + 0 + 0 = 20\text{N} \cdot 0{,}3\text{m} = 6\text{Nm}$$

Μονάδες 6

4.4. Η επίκεντρη γωνία που διαγράφει η επιβατική ακτίνα κάθε σημείου της τροχαλίας από την χρονική στιγμή $t_1 = 3\text{s}$ ως την χρονική στιγμή $t_2 = 4\text{s}$ (το 4º δευτερόλεπτο) μπορεί να υπολογιστεί από την γραφική παράσταση γωνιακής ταχύτητας χρόνου, μέσω του εμβαδού. Όπως φαίνεται από το επόμενο σχήμα, είναι αριθμητικά ίση με το εμβαδό του τραπεζίου ΚΛΜΝ, με $\omega_2 = \alpha_\gamma t_2 = 4 \cdot 4\frac{\text{rad}}{\text{s}} = 16\frac{\text{rad}}{\text{s}}$.



$$\Delta\theta_1 = (\text{ΚΛΜΝ}) = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\Delta t = \frac{(12+16)}{2} \cdot 1\ \text{rad} = 14\ \text{rad}$$

Το μήκος του νήματος που ξετυλίγεται είναι ίσο με το μήκος τόξου της περιφέρειας της τροχαλίας που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία $\Delta\theta_1$, δηλαδή

$$s = R \cdot \Delta\theta_1 = 0{,}3\ \text{m} \cdot 14\ \text{rad} = 4{,}2\ \text{m}$$

Μονάδες 7