Λύση

α) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων, λύνουμε το παρακάτω σύστημα για $x \in [0,2\pi]$, όπου ισχύει $e^{-x}>0$:

$$\begin{cases} y= & f(x) \\ y= & g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y= & e^{-x} \\ y= & e^{-x}\eta\mu x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y= & e^{-x} \\ e^{-x}= & e^{-x}\eta\mu x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y= & e^{-x} \\ 1= & \eta\mu x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y= & e^{-x} \\ x= & 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y= & e^{\frac{-\pi}{2}} \\ x= & \dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Συνεπώς, μοναδικό κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων είναι το $A\left(\frac{\pi}{2}, e^{\frac{-\pi}{2}}\right)$.

β) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο Α θα έχει εξίσωση:

$y-f(x_A)=f'(x_A)(x-x_A)$, με $f(x_A)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{-\pi}{2}}$ και εφόσον $f'(x)=e^{-x}(-x)'=-e^{-x}$ θα είναι

$f'(x_A)=-e^{\frac{-\pi}{2}}$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο Α θα έχει εξίσωση:

$y-g(x_A)=g'(x_A)(x-x_A)$, με $g(x_A)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{-\pi}{2}}\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{-\pi}{2}}$ και εφόσον

$g'(x)=e^{-x}(-x)'\eta\mu x+e^{-x}\sigma\upsilon\nu x=e^{x}(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)$

θα είναι

$$g'(x_A)=e^{\frac{-\pi}{2}}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}-\eta\mu\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{-\pi}{2}}(0-1)=-e^{\frac{-\pi}{2}}.$$

Συνεπώς, οι εξισώσεις των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων είναι ίδιες, άρα ταυτίζονται, δηλαδή οι γραφικές παραστάσεις δέχονται κοινή εφαπτομένη στο Α.

γ) Ισχύει ότι $f(x)-g(x)=f(x)-f(x)\eta\mu x=f(x)(1-\eta\mu x)\geq 0$, για κάθε $x \in [0,2\pi]$.

Συνεπώς, για το ζητούμενο εμβαδόν Ε ισχύει:

$$E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\left(f(x)-g(x)\right)\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{-x}-e^{-x}\eta\mu\, x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\eta\mu\, x\, dx\,.$$

Για τα δύο ολοκληρώματα ισχύει ότι:

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-e^{\frac{-\pi}{2}}+e^0=-e^{\frac{-\pi}{2}}+1\,.$$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\eta\mu\, x\, dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-e^{-x}\right)'\eta\mu\, x\, dx=\left[-e^{-x}\eta\mu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\sigma\upsilon\nu\, x\, dx=-e^{\frac{-\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-e^{-x}\right)'\sigma\upsilon\nu\, x\, dx=$$

$$=-e^{\frac{-\pi}{2}}-\left[e^{-x}\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{-x}\left(\sigma\upsilon\nu\, x\right)'\right)dx=-e^{\frac{-\pi}{2}}+1-I_2\,.$$

Οπότε $2I_2=1-e^{\frac{-\pi}{2}}\Leftrightarrow I_2=\frac{1}{2}\left(1-e^{\frac{-\pi}{2}}\right).$

Τελικά το εμβαδόν είναι ίσο με $E=-e^{\frac{-\pi}{2}}+1-\frac{1}{2}\left(1-e^{\frac{-\pi}{2}}\right)=\frac{1-e^{\frac{-\pi}{2}}}{2}.$