Λύση

α) Η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως φθίνουσα, διότι:

Για κάθε $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow -x_1^3 > -x_2^3 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Ή αλλιώς χρησιμοποιώντας την παράγωγο της συνάρτησης $f$ έχουμε:

$f'(x) = -3x^2 < 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$. Επιπλέον, η συνάρτηση είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$, οπότε $f$ γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

β) Η συνάρτηση $f$ είναι ένα προς ένα, διότι η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε είναι "1-1", άρα αντιστρέψιμη.

Η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(-\infty, 0]$, οπότε το σύνολο τιμών της θα είναι:

$$f((-\infty, 0]) = \left[f(0), \lim_{x \to -\infty}(-x^3)\right) = [0, +\infty).$$

Τότε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης θα είναι το σύνολο τιμών της $f$, δηλαδή $D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$.

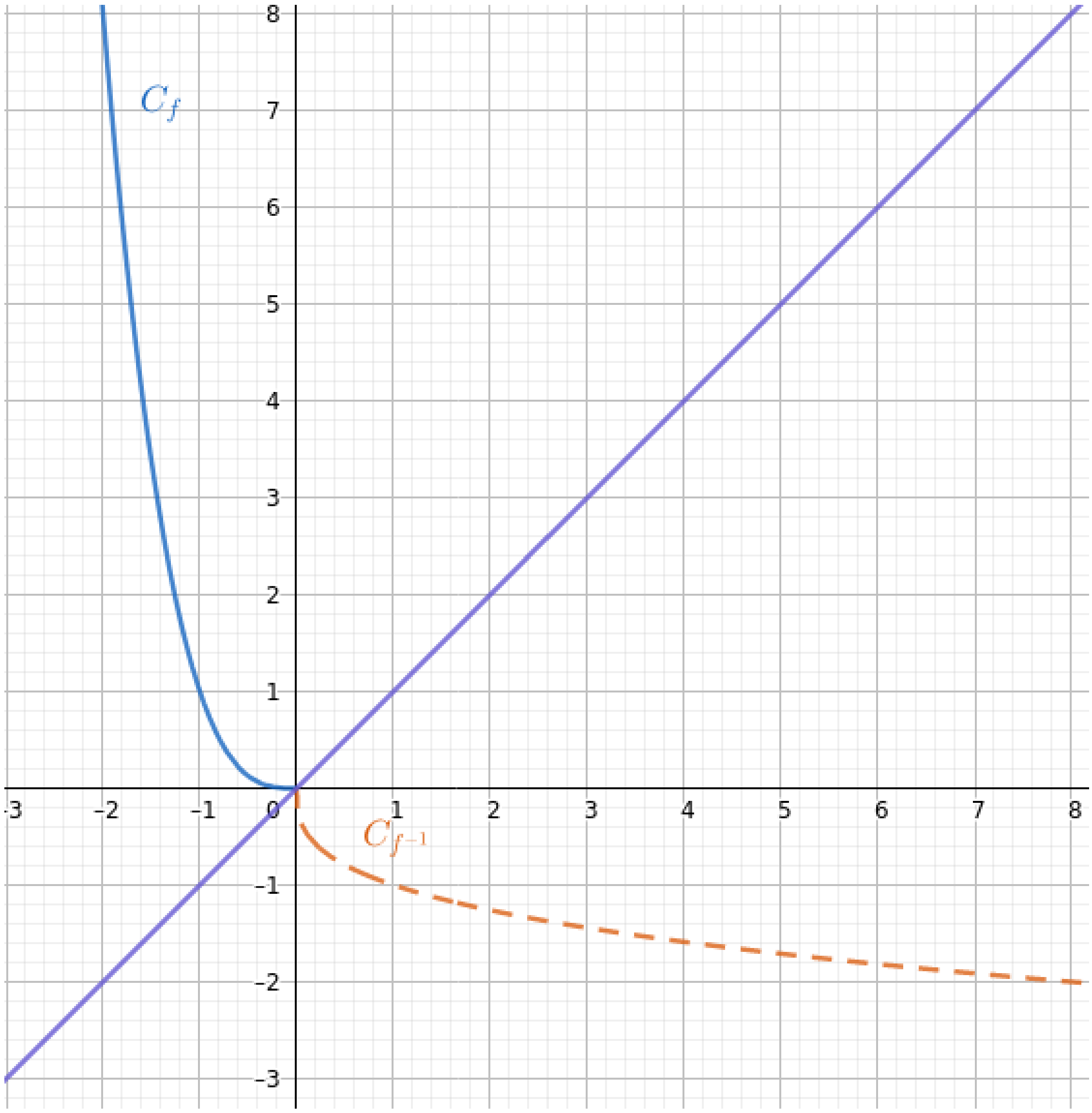
γ) Για να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης λύνουμε ως προς x την εξίσωση:

$y = f(x), x \leq 0, y \geq 0,$ για την οποία έχουμε ισοδύναμα:

$$y = -x^3 \Leftrightarrow x^3 = -y \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{y}, y \geq 0.$$

Συνεπώς η αντίστροφη συνάρτηση είναι $f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x}, x \geq 0.$

Στο επόμενο σχήμα βλέπουμε και τις συμμετρικές ως προς την y=x γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων:



$C_f$
$C_{f^{-1}}$
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8