Λύση

α) Η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως φθίνουσα, διότι:

Για κάθε $x\_{1},x\_{2}\in D\_{f}=ℝ$, με $x\_{1}<x\_{2}⇒x\_{1}^{3}<x\_{2}^{3}⇒−x\_{1}^{3}>−x\_{2}^{3}⇒f\left(x\_{1}\right)>f\left(x\_{2}\right).$

Ή αλλιώς χρησιμοποιώντας την παράγωγο της συνάρτησης $f$ έχουμε:

$f^{'}\left(x\right)=−3x^{2}<0,$ για κάθε $x\in \left(−\infty ,0\right)$. Επιπλέον, η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\left(−\infty ,0\right]$ , οπότε $f$ γνησίως φθίνουσα στο $\left(−\infty ,0\right]$.

β) Η συνάρτηση $f$ είναι ένα προς ένα, διότι η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε είναι “1-1”, άρα αντιστρέψιμη.

 Η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\left(−\infty ,0\right]$, οπότε το σύνολο τιμών της θα είναι:

 $f\left(\left(−\infty ,0\right]\right)=\left[f\left(0\right),\lim\_{x\to −\infty }\left(−x^{3}\right)\right)=\left[0,+\infty \right).$

Τότε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης θα είναι το σύνολο τιμών της $f$, δηλαδή $D\_{f^{−1}}=\left[0,+\infty \right).$

γ) Για να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης λύνουμε ως προς x την εξίσωση:

 $y=f\left(x\right),x\leq 0,y\geq 0,$ για την οποία έχουμε ισοδύναμα:

$y=−x^{3}⇔x^{3}=−y⇔x=−\sqrt[3]{y},y\geq 0.$

Συνεπώς η αντίστροφη συνάρτηση είναι $f^{−1}\left(x\right)=−\sqrt[3]{x},x\geq 0.$

Στο επόμενο σχήμα βλέπουμε και τις συμμετρικές ως προς την y=x γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων:

