ΛΥΣΗ

α) Η f είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών. Επίσης από την υπόθεση είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως το σύνολο τιμών της είναι $f([0,+\infty))=[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x))$.

Για να βρούμε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, θέτουμε $u=\sqrt{x}$. Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} u=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ και

$\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u-1}{u+2}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u}{u}=1$. Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}=1$.

Τελικά $f([0,+\infty))=[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x))=[-\dfrac{1}{2},1)$.

β) Για $x\in D_f$ και $y\in[-\dfrac{1}{2},1)$ έχουμε:

$$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}=y \Leftrightarrow \sqrt{x}-1=y(\sqrt{x}+2) \Leftrightarrow \sqrt{x}-1=y\sqrt{x}+2y \Leftrightarrow$$

$\sqrt{x}-y\sqrt{x}=1+2y \Leftrightarrow (1-y)\sqrt{x}=1+2y \Leftrightarrow \sqrt{x}=\dfrac{1+2y}{1-y} \Leftrightarrow x=\left(\dfrac{1+2y}{1-y}\right)^2$, όπου

$\dfrac{1+2y}{1-y}\geq 0$ για $y\in[-\dfrac{1}{2},1)$.

Επομένως ορίζεται η αντίστροφη της f με πεδίο ορισμού το $[-\dfrac{1}{2},1)$ και τύπο

$$f^{-1}(x)=\left(\frac{1+2x}{1-x}\right)^2.$$

,

γ)

i. Από τα πεδία ορισμού καθώς και τα σύνολα τιμών των δύο συναρτήσεων συμπεραίνουμε ότι η καμπύλη C_1 αντιστοιχεί στην C_f και η C_2 στην $C_{f^{-1}}$.

ii. Επειδή $f^{-1}(x) \geq 0$ για $x \in [-\frac{1}{2}, 0]$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = -\frac{1}{2}$,

το ολοκλήρωμα $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f^{-1}(x)dx$ παριστάνει το εμβαδόν του χωρίου Ω_1 που

περικλείεται μεταξύ της $C_{f^{-1}}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$.

Επομένως $a > 0$.

Το ολοκλήρωμα $\mathrm{I} = \int_{0}^{1} f(x)dx$ μπορούμε να το βρούμε συναρτήσει του a με δύο

τρόπους:

1ος τρόπος (Γεωμετρικά)

Το συμμετρικό του χωρίου Ω_1 ως προς την $y = x$ είναι το χωρίο Ω_2 που

περικλείεται μεταξύ της C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$. Επειδή

$f(x) \leq 0$, για $x \in [0,1]$ έχουμε:

$$\mathrm{E}(\Omega_2) = \mathrm{E}(\Omega_1) \Rightarrow -\int_{0}^{1} f(x)dx = \alpha \Rightarrow \int_{0}^{1} f(x)dx = -\alpha .$$

2ος τρόπος (Αλγεβρικά)

Εφαρμόζοντας τον τύπο ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής (από το 2^o στο 1^o

μέλος) και στην συνέχεια ολοκλήρωση κατά παραγόντες, έχουμε:

$$\int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{f^{-1}(-\frac{1}{2})}^{f^{-1}(0)} f(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))'dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} x \cdot (f^{-1}(x))'dx =$$

$$\left[x \cdot f^{-1}(x)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} - \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f^{-1}(x)dx = -\alpha .$$