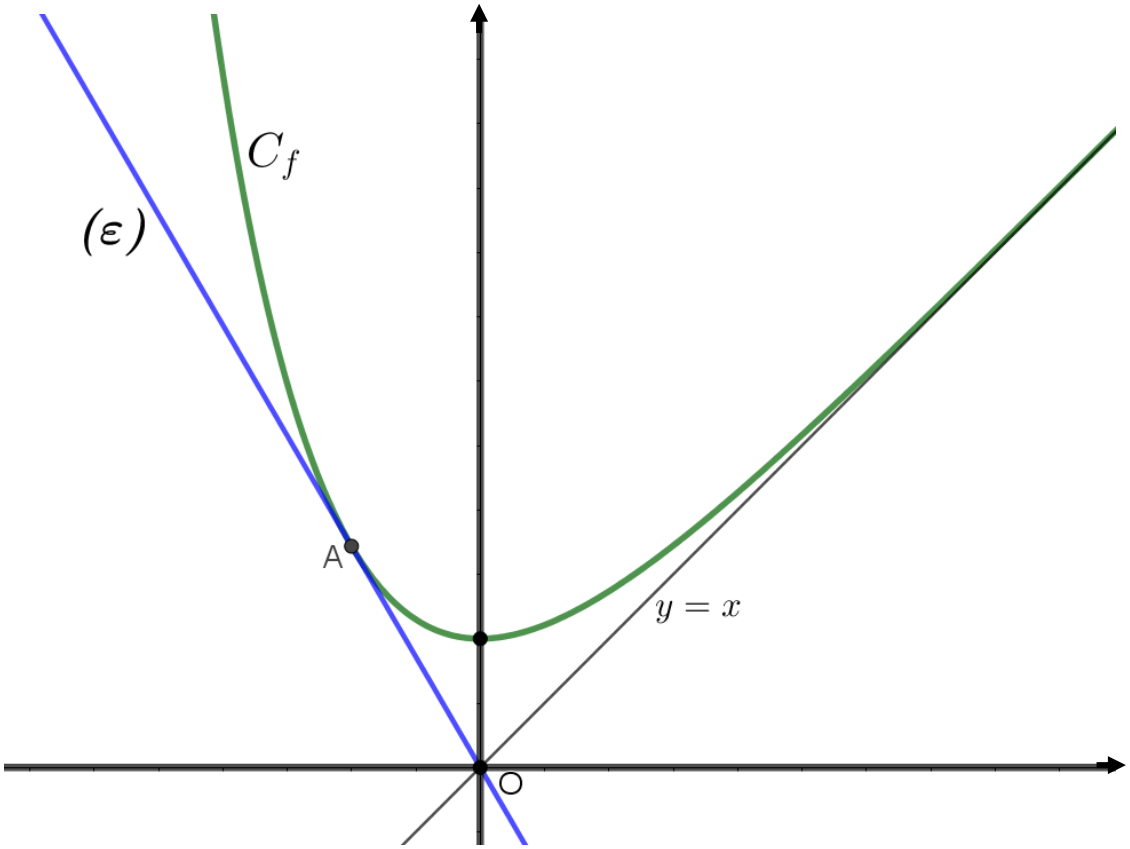
ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης στο R συνάρτησης $f(x)$ για την οποία γνωρίζουμε τα εξής:

- στο σημείο $A(-1, f(-1))$ της γραφικής παράστασης της f έχει σχεδιασθεί η εφαπτομένη ευθεία (ε), η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο $+\infty$.



α) Αν γνωρίζουμε ότι $f(-1) = e - 1$, να αποδείξετε ότι το $f'(-1) = 1 - e$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε).

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = 1$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{xf(x) - x^2}{f(x)}$.

(Μονάδες 8)