ΛΥΣΗ

α) Αν υποθέσουμε ότι η f δεν είναι 1-1, τότε θα υπάρχουν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, με $\alpha<\beta$ ώστε να ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$. Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, θα είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β), οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$, που είναι άτοπο αφού ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως η συνάρτηση f είναι 1-1.

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(0,2)$

$\xi_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{1-(-1)}{2}=\dfrac{2}{2}=1$.

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x$.

γ)

i. Επειδή $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η f' είναι συνεχής, η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο. Όμως σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα υπάρχει ξ_1 τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=1>0$, οπότε ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και κατά συνέπεια η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Εναλλακτικά,

Επειδή $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η f' είναι συνεχής, η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Επειδή $0<2$ και $f(0)<f(2)$ η συνάρτηση f δεν γνησίως φθίνουσα οπότε είναι γνησίως αύξουσα.

ii.Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,2]$ και ισχύει $f(0)\cdot f(2)=-1<0$, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η συνάρτηση f έχει μία τουλάχιστον ρίζα x_o η οποία ανήκει στο διάστημα $(0,2)$.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα είναι και 1-1, οπότε η ρίζα της x_o είναι μοναδική και συνεπώς η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο.

δ) Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και έχει μοναδική ρίζα το x_o, έχουμε

για $x<x_o$ ότι $f(x)<f(x_o)\Leftrightarrow f(x)<0\Leftrightarrow -f(x)>0\Leftrightarrow g'(x)>0$ και

για $x>x_o$ ότι $f(x)>f(x_o)\Leftrightarrow f(x)>0\Leftrightarrow -f(x)<0\Leftrightarrow g'(x)<0$.

Επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής, αφού παραγωγίζεται στο R, ισχύει ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, x_o)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(x_o, +\infty)$, οπότε η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x_o.

Το πρόσημο της g', το είδος της μονοτονίας της g στα διαστήματα $(-\infty, x_o)$ και $(x_o, +\infty)$ καθώς και το ακρότατο της g συγκεντρώνονται συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	x_o	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$\nearrow$		$\searrow$