

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1.

(Μονάδες 5)

Δίνεται επιπλέον ότι

- η συνάρτηση f' είναι συνεχής,
- $f(0) = -1$ και $f(2) = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x$.

(Μονάδες 5)

γ)

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα

(Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 2)$.

(Μονάδες 5)

δ) Αν g είναι μια συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $g'(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x_0 .

(Μονάδες 6)