ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1} - 1 < e^{x_2} - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

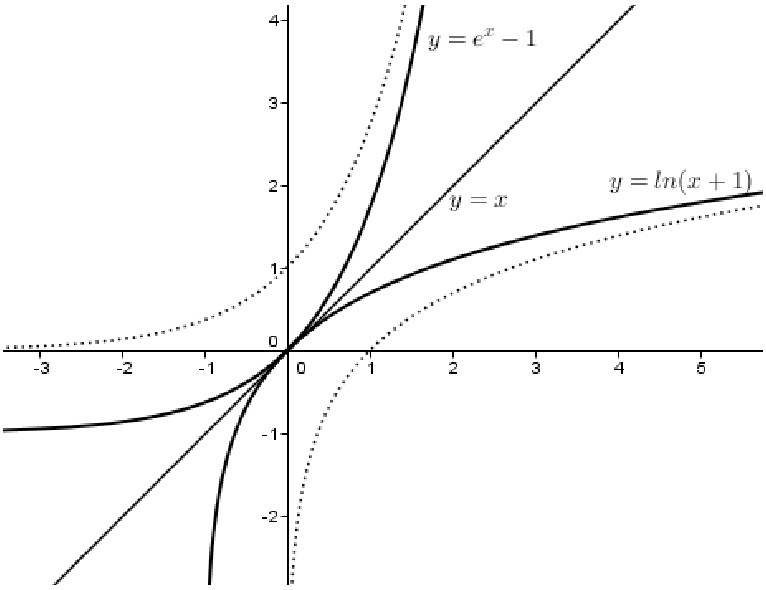
Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι $1-1$, άρα αντιστρέφεται.

β) Αν $f(x) = y$, τότε έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow e^x - 1 = y \Leftrightarrow e^x = y + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y+1) \\ y + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y+1) \\ y > -1 \end{cases}$$

Άρα $f^{-1}(x) = \ln(x+1),\ x > -1$.

γ) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την $y = x$, οπότε η γραφική παράσταση της f^{-1} προκύπτει αφού φέρουμε την διχοτόμο $y = x$ και θεωρήσουμε τη συμμετρική της C_f, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Σχόλιο

Στο σχήμα φαίνεται και μια εναλλακτική προσέγγιση του ερωτήματος, αφού η γραφική παράσταση της f^{-1}, με βάση τον τύπο της, μπορεί να προκύψει από μετατόπιση της $y = \ln x$ κατά μια μονάδα προς τα αριστερά.

Σε κάθε περίπτωση, αποδεικνύεται ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} έχουν κοινή εφαπτομένη την διχοτόμο $y = x$.