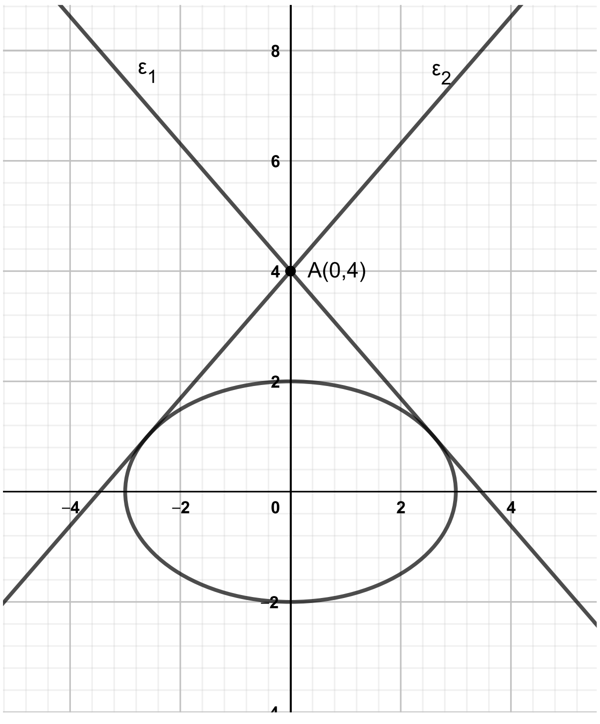
ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, όπου $\alpha^2 = 9$ και $\beta^2 = 4$.

i. Για να βρούμε τα σημεία τομής της έλλειψης αυτής με τον άξονα x'x θέτουμε στην εξίσωση (1) y=0. Έτσι έχουμε $\frac{\chi^2}{9} = 1$ ή $x^2 = 9$, οπότε x =3 ή x= -3. Τα σημεία τομής με τον άξονα x'x είναι τα σημεία K(3,0) και K'(-3,0).
Αντίστοιχα, για να βρούμε τα σημεία τομής της έλλειψης αυτής με τον άξονα y'y θέτουμε στην εξίσωση (1) x=0. Έτσι έχουμε $\frac{y^2}{4} = 1$ ή $y^2 = 4$, οπότε y =2 ή y= -2. Τα σημεία τομής με τον άξονα y'y είναι τα σημεία B(0,2) και B'(0,-2).

ii. Η εξίσωση (1) παριστάνει έλλειψη με εστίες στον άξονα x'x. Οπότε οι εστίες έχουν συντεταγμένες E(γ, 0) , και E'(-γ, 0), όπου $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{5}$. Άρα οι εστίες της E, και E' έχουν συντεταγμένες E($\sqrt{5}$, 0) και E'(-$\sqrt{5}$, 0).

β)



Το σημείο A(0, 4) είναι εξωτερικό σημείο της έλλειψης, αφού είναι σημείο στον άξονα y'y και η έλλειψη που μας δόθηκε τέμνει τον άξονα y'y στα σημεία B(0, 2) και B'(0,-2). Θεωρούμε M(x_1, y_1) το σημείο επαφής. Η εξίσωση της εφαπτόμενης στο σημείο M θα είναι της μορφής ε: $\frac{x\,x_1}{9} + \frac{y\,y_1}{4} = 1 \Leftrightarrow 4\,xx_1 + 9\,yy_1 = 36$. Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο Α(0 , 4), οπότε οι συντεταγμένες του σημείου Α επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας ε. Ισχύει δηλαδή $4 \cdot 0\, x_1 + 9 \cdot 4 y_1 = 36 \Leftrightarrow y_1 = 1$ (2).

Επιπλέον το σημείο $M(x_1, y_1)$ είναι σημείο της έλλειψης, οπότε ικανοποιεί την εξίσωση(1). Άρα ισχύει $\frac{x_1{}^2}{9} + \frac{y_1{}^2}{4} = 1$ (3), και λόγω της (2) η σχέση (3) μας δίνει

$$\frac{x_1{}^2}{9} + \frac{1^2}{4} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_1{}^2}{9} = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{ή} \quad x_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Για $x_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ και λόγω της (2) έχουμε $y_1 = 1$, έχουμε την εφαπτόμενη ε με εξίσωση

$$\varepsilon:\ 4\,\frac{3\sqrt{3}}{2}x + 9\ y = 36 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{3}\,x + 3y = 12.$$

Για $x_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ από τη σχέση (2) έχουμε $y_1 = 1$, οπότε η εφαπτόμενη ε έχει εξίσωση

$$\varepsilon:\ 4\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)x + 9\ y = 36 \quad \Leftrightarrow \quad -2\sqrt{3}\,x + 3y = 12.$$

Άρα οι δύο εφαπτόμενες της έλλειψης που διέρχονται από το σημείο Α(0, 4) είναι οι ε_1 : $2\sqrt{3}\,x + 3y = 12$ και ε_2 : $-2\sqrt{3}\,x + 3y = 12$.