ΛΥΣΗ

α) Γενικά, η εξίσωση $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$ παριστά κύκλο με κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ, αν $\rho>0$ (ή ακτίνα $|\rho|$, αν $\rho\neq 0$). Συνεπώς, αν $\lambda\neq 0$, η εξίσωση $(x-\lambda)^2+(y-\lambda)^2=\lambda^2$ παριστά κύκλο με κέντρο $K(\lambda,\lambda)$ και ακτίνα $|\lambda|$.

β) Παρατηρούμε ότι για $x=\lambda$ και $y=\lambda$ επαληθεύεται η εξίσωση $y=x$. Επομένως, για κάθε $\lambda\neq 0$, το κέντρο $K(\lambda,\lambda)$ του κύκλου C_λ είναι σημείο της ευθείας $y=x$.

Για τα ερωτήματα γ), δ), ε) υπενθυμίζουμε ότι μία ευθεία $\varepsilon: Ax+By+\Gamma=0$ (με $|A|+|B|\neq 0$) εφάπτεται σε ένα κύκλο με κέντρο $K(x_0,y_0)$ και ακτίνα ρ αν και μόνο αν $d(K,\varepsilon)=\rho$ ή ισοδύναμα αν

$$\frac{|Ax_0+By_0+\Gamma|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\rho \quad (1).$$

Επίσης, από το α) ερώτημα, για κάθε $\lambda\neq 0$, η εξίσωση $(x-\lambda)^2+(y-\lambda)^2=\lambda^2$ παριστά κύκλο C_λ με κέντρο $K(\lambda,\lambda)$ και ακτίνα $|\lambda|$. Οπότε:

$$x_0=\lambda,\quad y_0=\lambda,\quad \rho=|\lambda|$$

γ) Θεωρούμε την ευθεία $x=0$. Εδώ: $A=1$, $B=0$, $\Gamma=0$. Οπότε, η σχέση (1) ικανοποιείται για κάθε $\lambda\neq 0$, αφού: $\frac{|1\cdot\lambda+0\cdot\lambda+0|}{\sqrt{1^2+0^2}}=|\lambda|$ (ταυτότητα).

Άρα, η ευθεία $x=0$ εφάπτεται σε όλους τους κύκλους C_λ, $\lambda\neq 0$.

Για να δείξουμε ότι η ευθεία $y=0$ εφάπτεται σε όλους τους κύκλους C_λ θα μπορούσαμε να εργαστούμε όμοια με παραπάνω ή να παρατηρήσουμε ότι υπάρχει συμμετρία ως προς την $1^η$ διχοτόμο, καθώς η εξίσωση $(x-\lambda)^2+(y-\lambda)^2=\lambda^2$ παραμένει αναλλοίωτη αν εναλλάξουμε τους ρόλους των x και y.

δ) Έστω $\alpha\neq 0$. Θεωρούμε την ευθεία $x=\alpha$. Εδώ: $A=1$, $B=0$, $\Gamma=-\alpha$. Οπότε, η σχέση (1) γίνεται: $\frac{|1\cdot\lambda+0\cdot\lambda-\alpha|}{\sqrt{1^2+0^2}}=|\lambda|\Leftrightarrow|\lambda-\alpha|=|\lambda|\Leftrightarrow\lambda-\alpha=\pm\lambda$. Το θετικό πρόσημο δίνει $\alpha=0$ (πράγμα αδύνατο, αφού έχει υποτεθεί $\alpha\neq 0$), ενώ το αρνητικό πρόσημο δίνει την μοναδική αποδεκτή τιμή του λ που είναι το $\frac{\alpha}{2}$.

Λόγω συμμετρίας, το ίδιο συμβαίνει και για την ευθεία $y=\alpha$.