

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για εκείνα μόνο τα x για τα οποία ισχύει $10^x - 2 > 0 \Leftrightarrow 10^x > 2 \Leftrightarrow x > \log 2$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = (\log 2, +\infty)$.

β)

i. Με $x \in (\log 2, +\infty)$, έχουμε:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{10^x}{3}} = \sqrt{10^x - 2} &\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{10^x}{3}}\right)^2 = (\sqrt{10^x - 2})^2 \Leftrightarrow \\ \frac{10^x}{3} = 10^x - 2 &\Leftrightarrow 10^x = 3 \cdot 10^x - 6 \Leftrightarrow \\ 6 = 2 \cdot 10^x &\Leftrightarrow 10^x = 3 \Leftrightarrow x = \log 3\end{aligned}$$

ii. Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g , επιλύουμε την εξίσωση $g(x) = f(x)$ για τα κοινά x στα οποία αυτές ορίζονται, δηλαδή για $x \in (\log 2, +\infty)$.

Είναι:

$$g(x) = f(x) \Leftrightarrow \log \sqrt{\frac{10^x}{3}} = \log \sqrt{10^x - 2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{10^x}{3}} = \sqrt{10^x - 2} \stackrel{(\beta i)}{\Leftrightarrow} x = \log 3 \text{ και}$$

$$y = f(\log 3) = \log \sqrt{10^{\log 3} - 2} = \log \sqrt{3 - 2} = \log 1 = 0$$

Έτσι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ένα κοινό σημείο, το $(\log 3, 0)$.