ΛΥΣΗ

α) Η υπερβολή $C$ έχει κέντρο το $(0,0)$ και εστίες στον άξονα $xx΄$, οπότε θα έχει ασύμπτωτες της μορφής $y=\frac{β}{α}x , y=-\frac{β}{α}x$. Αφού το ορθογώνιο βάσης είναι τετράγωνο, συμπεραίνουμε ότι $α=β$ δηλαδή είναι ισοσκελής υπερβολή. Συνεπώς

i. οι εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής $C$ είναι $y=x , y=-x$.

ii. για την εκκεντρότητα $ε$ της $C$ ισχύει ότι $ε^{2}=1+\left(\frac{β}{α}\right)^{2}=1+1=2$ και επειδή $ε>0$ έχουμε τελικά ότι $ε=\sqrt{2}$.

β) Αφού η $(ζ)$ είναι παράλληλη σε κάποια εκ των ασύμπτωτων της $C$, θα έχει εξίσωση της μορφής $y=x+κ$ ή $y=-x+κ$ με $κ\ne 0$. Η ισοσκελής υπερβολή $C$ θα έχει εξίσωση της μορφής $x^{2}-y^{2}=α^{2}$. Αφού διέρχεται από το σημείο $(2,0)$ έχουμε ότι $2^{2}-0^{2}=α^{2}⇔4=α^{2}\overset{α>0}{⇔}α=2$.

Το πλήθος των κοινών σημείων της $C$ και της ευθείας $(ζ)$ είναι ίδιο με το πλήθος των λύσεων καθενός από τα συστήματα $\left\{\begin{matrix}x^{2}-y^{2}=4\\y=x+κ\end{matrix}\right.$ και $\left\{\begin{matrix}x^{2}-y^{2}=4\\y=-x+κ\end{matrix}\right.$.

Λύνουμε το 1ο σύστημα με αντικατάσταση της 2ης εξίσωσης στην 1η και έχουμε : $x^{2}-(x+κ)^{2}=4⇔x^{2}-x^{2}-2xκ-κ^{2}=4⇔-2xκ=4+κ^{2}\overset{κ\ne 0}{⇔}x=-\frac{4+κ^{2}}{2κ}$

και από τη 2η εξίσωση έχουμε ότι $y=-\frac{4+κ^{2}}{2κ}+κ$

Ομοίως λύνουμε το 2ο σύστημα με αντικατάσταση της 2ης εξίσωσης στην 1η και έχουμε :

$$x^{2}-(-x+κ)^{2}=4⇔x^{2}-x^{2}+2xκ-κ^{2}=4⇔2xκ=4+κ^{2}\overset{κ\ne 0}{⇔}x=\frac{4+κ^{2}}{2κ}$$

και από τη 2η εξίσωση έχουμε ότι $y=-\frac{4+κ^{2}}{2κ}+κ$

i. Σε κάθε περίπτωση το σύστημα έχει μοναδική λύση που σημαίνει ότι η $(ζ)$ έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την $C$.

ii. Επειδή σε κάθε περίπτωση η μοναδική λύση του συστήματος προέκυψε από εξίσωση 1ου βαθμού και όχι από 2ου με διακρίνουσα 0, η ευθεία $(ζ)$ δεν είναι εφαπτόμενη της $C$. Απλά την τέμνει σε ένα σημείο χωρίς όμως το σημείο αυτό να είναι σημείο επαφής . Δηλαδή η $(ζ)$ διαπερνά τη $C$.

Σημείωση : το παραπάνω συμπέρασμα ισχύει για κάθε υπερβολή και ευθεία παράλληλη σε κάποια από τις ασύμπτωτες και όχι μόνο για τις ισοσκελείς.