ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $\eta\mu(\pi - x) = \eta\mu x$, $\eta\mu(\pi + x) = -\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$, επομένως:

$A = \eta\mu^2 x + (-\eta\mu x)^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x = \eta\mu^2 x + \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 + \eta\mu^2 x.$

β) $B = \dfrac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} + \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \dfrac{\eta\mu^2 x+(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}{(1+\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x} = \dfrac{\eta\mu^2 x+1+2\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^2 x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x}$

$= \dfrac{2(1+\sigma\upsilon\nu x)}{(1+\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x} = \dfrac{2}{\eta\mu x}$.

γ) Θα εξετάσουμε αν η εξίσωση $A = B$ δηλαδή $\eta\mu^2 x + 1 = \dfrac{2}{\eta\mu x}$ (1) έχει λύση.

Θέτουμε $\eta\mu x = \omega$ και η εξίσωση (1) μετασχηματίζεται στην $\omega^2 + 1 = \dfrac{2}{\omega}$ (2).

Επειδή $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ είναι $-1 < \eta\mu x < 0$ δηλαδή $-1 < \omega < 0$.

Τότε: (2) $\Leftrightarrow \omega^3 + \omega = 2 \Leftrightarrow \omega^3 + \omega - 2 = 0 \Leftrightarrow \omega^3 - \omega + 2\omega - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\omega(\omega^2 - 1) + 2(\omega - 1) = 0 \Leftrightarrow \omega(\omega - 1)(\omega + 1) + 2(\omega - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$(\omega - 1)[\omega(\omega + 1) + 2] = 0 \Leftrightarrow (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 2) = 0 \Leftrightarrow$

$\omega - 1 = 0$ ή $\omega^2 + \omega + 2 = 0 \Leftrightarrow \omega = 1$ ή $\omega^2 + \omega + 2 = 0$

Η $\omega = 1$ απορρίπτεται λόγω του περιορισμού ενώ η εξίσωση $\omega^2 + \omega + 2 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -7$, οπότε είναι αδύνατη.

Επομένως, δεν υπάρχουν τιμές του x τέτοιες, ώστε $A = B$.