ΛΥΣΗ

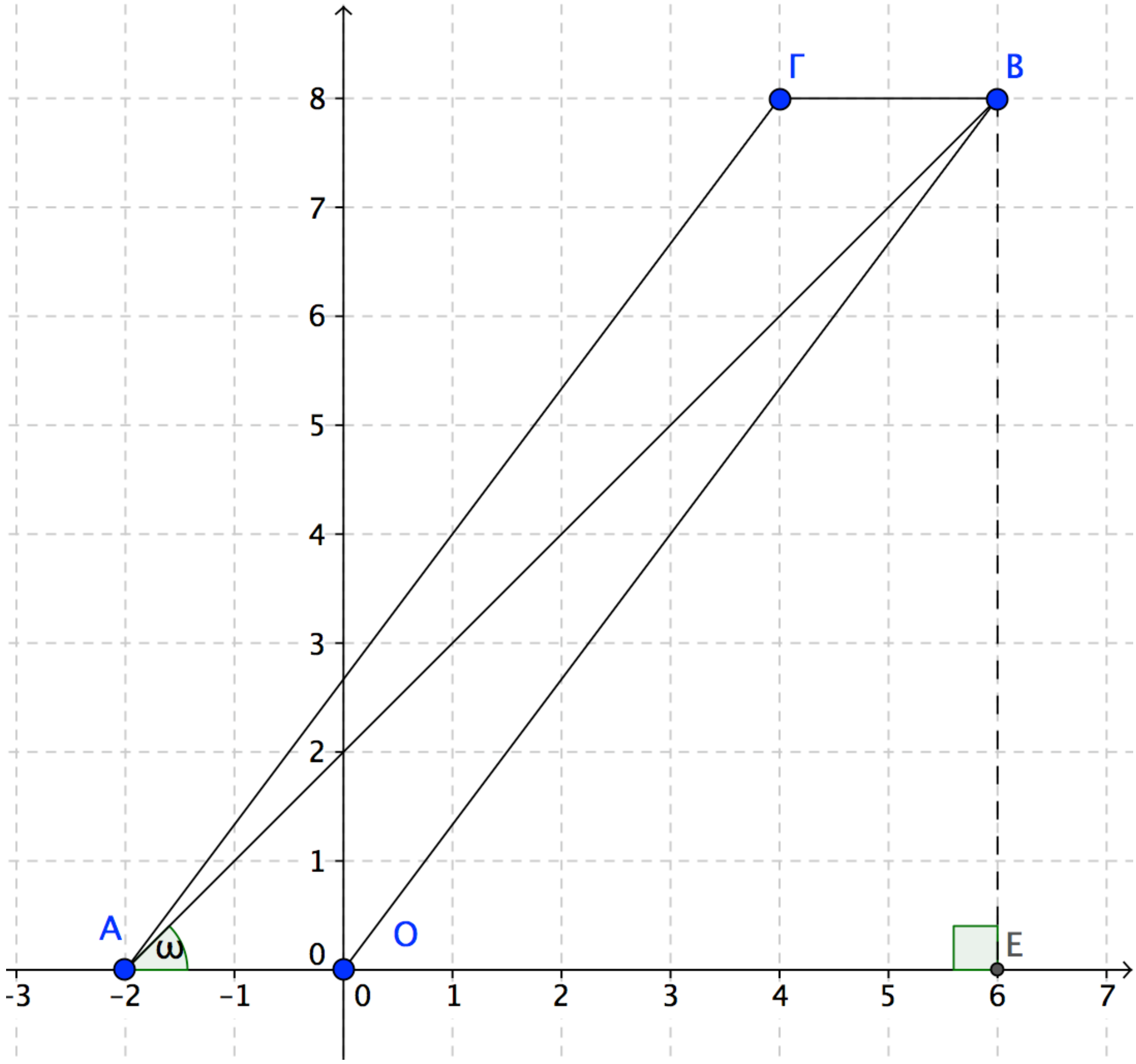
α) Έχουμε: $|\vec{\alpha}|^2 = (|\vec{\alpha}| - 4)^2 + (|\vec{\alpha}| - 2)^2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 - 12|\vec{\alpha}| + 20 = 0 \Leftrightarrow$
$|\vec{\alpha}| = 2$ ή $|\vec{\alpha}| = 10$.

Αν $|\vec{\alpha}| = 2$ τότε $\vec{\alpha} = (-2,0)$ και τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\alpha} = (-2,0)$ και $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (6,8)$ δεν είναι παράλληλα (σχηματίζουν τρίγωνο), αφού $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$ επομένως η λύση είναι δεκτή.

Αν $|\vec{\alpha}| = 10$, τότε $\vec{\alpha} = (6,8) = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ επομένως τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ δεν σχηματίζουν τρίγωνο. Έτσι, η λύση αυτή απορρίπτεται.

β) Για να είναι το τετράπλευρο $\mathrm{OA\Gamma B}$ παραλληλόγραμμο πρέπει και αρκεί $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$ (1). Αν $\Gamma(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ τότε η σχέση (1) γράφεται:
$(-2,0) = (x - 6, y - 8) \Leftrightarrow x - 6 = -2$ και $y - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ και $y = 8$, δηλαδή $\Gamma(4,8)$.

γ) Αρκεί να βρούμε την γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.



Α΄ τρόπος:

Το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ είναι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (8, 8)$. Επίσης $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA} = (2,0)$.

Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\overrightarrow{AO}$ και $\overrightarrow{AB}$, τότε:

$$\text{συνω} = \frac{\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AO}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AO}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{16}{2 \cdot 8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{συν}\frac{\pi}{4} \Longrightarrow \omega = \frac{\pi}{4}$$

Β΄ τρόπος:

Από το παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι, αν $E(6,0)$ είναι η προβολή του σημείου B πάνω στον άξονα $x'x$ τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ABE έχουμε:

$$\text{εφω} = \frac{BE}{EA} = \frac{8}{8} = 1 = \text{εφ}\frac{\pi}{4} \Longrightarrow \omega = \frac{\pi}{4}.$$