

ΛΥΣΗ

α) Η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, με $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$, έχει εστίες τις $E'(-\gamma, 0)$, $E(\gamma, 0)$ και ασύμπτωτες τις ευθείες $\varepsilon_1: y = \frac{\beta}{\alpha}x$, $\varepsilon_2: y = -\frac{\beta}{\alpha}x$.

Η υπερβολή $C: x^2 - y^2 = 1$ είναι ισοσκελής, με $\alpha = \beta = 1$.

Επιπλέον $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2} \Leftrightarrow 1 = \sqrt{\gamma^2 - 1} \Leftrightarrow \gamma^2 = 2 \stackrel{\gamma > 0}{\Leftrightarrow} \gamma = \sqrt{2}$.

Επομένως, οι εστίες της C είναι τα σημεία $E'(-\sqrt{2}, 0)$, $E(\sqrt{2}, 0)$ και ασύμπτωτες, οι ευθείες $\varepsilon_1: y = x$, $\varepsilon_2: y = -x$.

β)

i. Η εφαπτομένη της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ είναι η ευθεία $\frac{x \cdot x_1}{\alpha^2} - \frac{y \cdot y_1}{\beta^2} = 1$.

Η εφαπτομένη της C στο σημείο $A(1, 0)$ είναι η $\zeta: x \cdot 1 - y \cdot 0 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

ii. Το σημείο Γ προκύπτει από την επίλυση του συστήματος $(\Sigma): \begin{cases} \varepsilon_1: y = x \\ \zeta: x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$.

Επομένως $\Gamma(1, 1)$.