ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση της έλλειψης C με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$, $E(\gamma, 0)$, μήκος μεγάλου άξονα 2α και μήκος μικρού άξονα 2β, είναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1, \text{ όπου } \beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$$

Η εξίσωση της έλλειψης C_1: $x^2+4y^2=4$ γίνεται ισοδύναμα $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. Είναι λοιπόν:

$\alpha^2=4 \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \alpha=2$, $\beta^2=1 \overset{\beta>0}{\Longleftrightarrow} \beta=1$ και $1=\sqrt{4-\gamma^2} \Leftrightarrow \gamma^2=3 \overset{\gamma>0}{\Longleftrightarrow} \gamma=\sqrt{3}$.

Επομένως, είναι:

$$2\alpha=4,\ 2\beta=2,\ E'\left(-\sqrt{3},0\right),\ E\left(\sqrt{3},0\right).$$

Για την έλλειψη C_2 : $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ είναι αντίστοιχα:

$\alpha^2=16 \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \alpha=4$, $\beta^2=4 \overset{\beta>0}{\Longleftrightarrow} \beta=2$ και $2=\sqrt{16-\gamma^2} \Leftrightarrow \gamma^2=12 \overset{\gamma>0}{\Longleftrightarrow} \gamma=2\sqrt{3}$.

Επομένως, είναι:

$$2\alpha=8,\ 2\beta=4,\ E'\left(-2\sqrt{3},0\right),\ E\left(2\sqrt{3},0\right).$$

β) Δύο ελλείψεις όταν έχουν την ίδια εκκεντρότητα ε λέγονται όμοιες, όπου $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}$.

Η έλλειψη C_1 έχει εκκεντρότητα $\varepsilon_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Η έλλειψη C_2 έχει εκκεντρότητα $\varepsilon_2=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Επομένως, ο ισχυρισμός είναι αληθής.