ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία (ε_1) διέρχεται από το σημείο M και έχει κλίση $\lambda = \varepsilon\varphi 45° = 1$. Επομένως, έχει εξίσωση $(\varepsilon_1):\ y - 2 = 1(x+2) \Leftrightarrow y = x + 4$.

β) Το σύνολο των σημείων του επιπέδου, που απέχουν ίση απόσταση από το σημείο E και την ευθεία (ζ), είναι παραβολή με εστία το σημείο $E\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ και διευθετούσα την ευθεία $(\zeta): y = \frac{1}{2}$.

Η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$ και παράμετρο $p = -1$. Επομένως η εξίσωσή της είναι η $x^2 = 2py \overset{p=-1}{\Longleftrightarrow} x^2 = -2y \Leftrightarrow x^2 + 2y = 0$.

γ)

i. Αν $K(x_1, y_1)$ είναι το σημείο επαφής, τότε η εφαπτομένη (n) της παραβολής έχει

εξίσωση $xx_1 = p(y + y_1) \overset{p=-1}{\Longleftrightarrow} y = -x_1 x - y_1$. Τότε είναι:

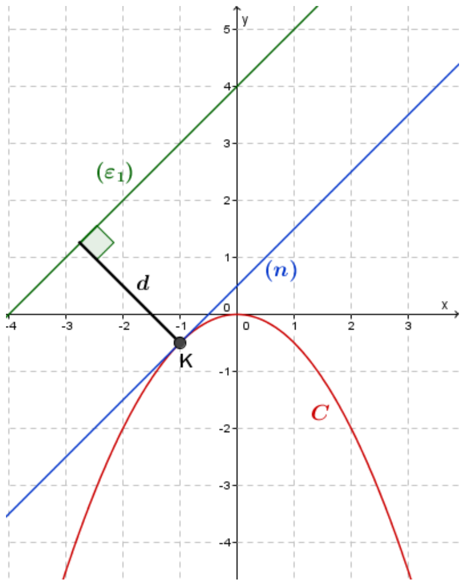
$$(n)//(\varepsilon_1) \Rightarrow \lambda_n = \lambda_{\varepsilon_1} \Rightarrow -x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$$

Επιπλέον το $K(x_1, y_1)$ ανήκει στην παραβολή, επομένως ισχύει:

$x_1^2 + 2y_1 = 0 \overset{x_1=-1}{\Longrightarrow} y_1 = -\frac{1}{2}$.

Έτσι η εφαπτομένη έχει εξίσωση (n): $y = x + \frac{1}{2}$.

ii. 1ος τρόπος: Με τη βοήθεια της παρακάτω γραφικής παράστασης:



Όπως φαίνεται στην γραφική παράσταση, η εφαπτομένη (n) και η παραβολή C έχουν μοναδικό κοινό σημείο το K. Επιπλέον ισχύει $(n)//(\varepsilon_1)$, με την (ε_1) να βρίσκεται "πάνω" από την (n).

Έτσι, η ελάχιστη απόσταση των σημείων της C από την ευθεία (ε_1) είναι η απόσταση του σημείου $K\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ από την ευθεία (ε_1): $x-y+4=0$.

Έτσι είναι:

$$d\big(K,(\varepsilon_1)\big)=\frac{\left|1\cdot(-1)-1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+4\right|}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{4}.$$

2^{ος} τρόπος: Η αλγεβρική προσέγγιση

Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο της παραβολής C , το $\Lambda\left(x_0,\ \frac{-x_0^2}{2}\right)$ με $x_0\in\mathbb{R}$.

Η απόσταση του Λ από την ευθεία (ε_1) είναι:

$$d=d(x_0)=\frac{\left|1\cdot x_0-1\cdot\left(\frac{-x_0^2}{2}\right)+4\right|}{\sqrt{2}}=\frac{|x_0^2+2x_0+8|}{2\sqrt{2}}$$

Αλλά $x_0^2+2x_0+8>0$ για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$, διότι έχει διακρίνουσα $\varDelta = -28 < 0$ και $\alpha = 1 > 0$.

Επομένως

$$d(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(x_0^2 + 2x_0 + 8),\ x_0 \in \mathbb{R}.$$

Η παραπάνω αποτελεί μία παραβολή που παρουσιάζει ελάχιστο για $x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = -1$ και ελάχιστη τιμή την $d(-1) = \frac{7}{2\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{4}$.