ΛΥΣΗ

α) Για την εύρεση των εξισώσεων των ευθειών (ε) που διέρχονται από το σημείο $M(-2,2)$ διακρίνονται δύο περιπτώσεις:

1η: Αν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε (ε): $y-2=\lambda\,(x+2)$

2η: Αν δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης, τότε (ε): $x=-2$.

β)

i. Η ευθεία με εξίσωση $x=-2$ είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και ως εκ τούτου δεν σχηματίζει τρίγωνο με τους δύο άξονες.

   Αν $\lambda=0$, προκύπτει η οριζόντια ευθεία με εξίσωση $y=2$, η οποία δεν σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες.

   Τέλος, για να τέμνει η (ε) τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον θετικό ημιάξονα Oy, πρέπει να έχει κλίση θετική, δηλαδή $\lambda>0$.

   Επομένως, οι ζητούμενες ευθείες έχουν εξίσωση $y-2=\lambda\,(x+2)$, με $\lambda>0$ (1).

ii. Αρχικά υπολογίζουμε ως συνάρτηση του $\lambda \in \mathbb{R}$, τις συντεταγμένες των σημείων τομής της (1) με τους δύο ημιάξονες. Έτσι είναι:

   $(1) \overset{x=0}{\Longrightarrow} y=2\lambda+2$.

   Επομένως το σημείο τομής των ευθειών με τον θετικό ημιάξονα Oy, είναι το $A(0,2\lambda+2)$.

   $(1) \overset{y=0}{\Longrightarrow} \lambda\cdot x=-2\lambda-2 \overset{\lambda>0}{\Longrightarrow} x=\frac{-2\lambda-2}{\lambda}$.

   Επομένως το σημείο τομής των ευθειών με τον αρνητικό ημιάξονα Ox', είναι το $B\left(\frac{-2\lambda-2}{\lambda},0\right)$.

   Το τρίγωνο που σχηματίζεται είναι το OAB, με εμβαδόν:

   $E=(OAB)=\frac{1}{2}\cdot(OA)\cdot(OB)=\frac{1}{2}\left|\frac{-2\lambda-2}{\lambda}\right|\cdot|2\lambda+2|=2\left|\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda}\right|=2\,\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda}$

   Αλλά ισχύει:

$$E=8 \Leftrightarrow 2\,\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda}=8 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2=4\lambda \Leftrightarrow \lambda^2-2\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=1$$

   Επομένως από την (1) προκύπτει ότι η ζητούμενη ευθεία είναι η (ε_1): $y=x+4$.

γ) Για να βρούμε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος, που εκφράζει το ύψος του τριγώνου που φέρεται απο την κορυφή O, αρκεί να βρούμε την απόσταση του σημείου O απο την ευθεία (ε_1): $y = x + 4 \Leftrightarrow x - y + 4 = 0$.

Είναι: $d(O, \varepsilon_1) = \frac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.