ΛΥΣΗ

α) Έστω $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$. Η εξίσωση έχει πιθανές ακέραιες ρίζες τις $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Το 2 είναι ρίζας της εξίσωσης διότι την επαληθεύει. Επομένως το $(x-2)$ είναι παράγοντας του $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$. Είναι λοιπόν:

1	-4	1	6	$\rho = 2$
	2	-4	-6	
1	-2	-3	0	

Επομένως, $P(x) = (x-2)(x^2 - 2x - 3)$.

Έτσι $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-2x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι $\Delta = 16 > 0$. Οπότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, τις

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x_1 = -1 \text{ ή } x_2 = 3.$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο

$$A = (-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty).$$

β) Η συνάρτηση δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή, διότι:

$$1 \in A, \; -2 \in A, \; -3 \in A \text{ αλλά το } -1, \text{ το } 2 \text{ και το } 3 \text{ δεν ανήκουν στο } A.$$

Επομένως δεν ικανοποιείται το πρώτο σκέλος των αντίστοιχων ορισμών, δηλαδή για κάθε $x \in A$ το $-x \in A$.

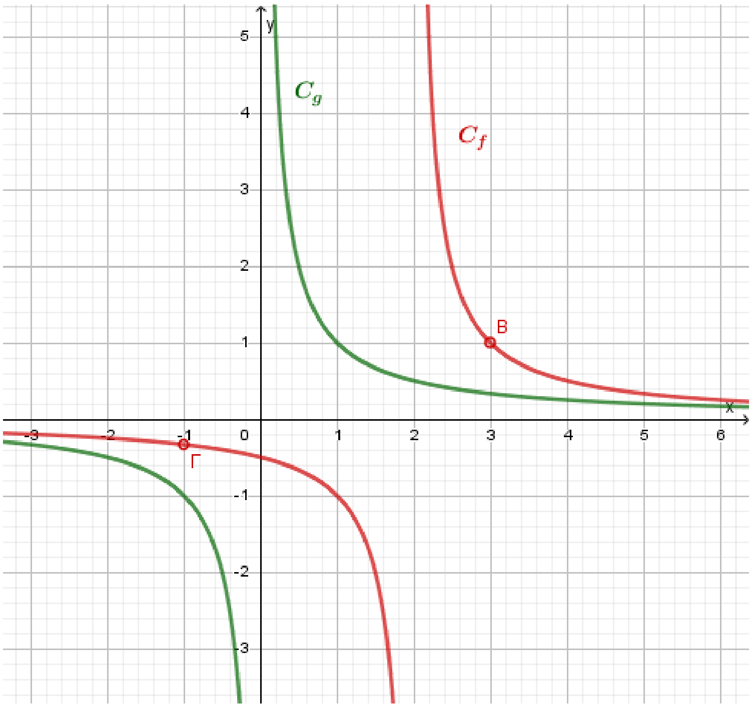
γ)

i. Είναι $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-2)(x^2-2x-3)}$.

   Ως εκ τούτου, ο τύπος της συνάρτησης απλοποιείται και έτσι είναι:

$$f(x) = \frac{1}{x-2}, \quad x \in A.$$

ii. Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{x}$ κατά 2 μονάδες δεξιά.



Η γραφική παράσταση της f είναι η παραπάνω υπερβολή με εξαίρεση τα σημεία $B(3,1)$ και $\Gamma\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$. Επιπλέον, έχει ασύμπτωτες τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 2$.

δ) Η εξίσωση $\left|\frac{1}{f(x)}\right| = 1$ είναι ισοδύναμη με την $|x-2| = 1,\ x \in A \Leftrightarrow$

$$x-2=-1 \text{ ή } x-2=1 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=3$$

Μοναδική αποδεκτή λύση στο πεδίο ορισμού A της συνάρτησης είναι η $x = 1$.