ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα έχουμε ότι $(OAM)=\frac{4}{6}\Leftrightarrow \frac{(OA)\cdot(AM)}{2}=\frac{1\cdot(AM)}{2}=\frac{4}{6}\Leftrightarrow (AM)=\frac{4}{3}$

άρα $y_M=\frac{4}{3}$, επομένως $\varepsilon\varphi\omega=\frac{4}{3}$. Η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΟΜ είναι ορθή, επομένως για τη γωνία $\omega=\mathrm{A\hat{O}M}$ ισχύει $0<\omega<\frac{\pi}{2}$.

β) Έχουμε ότι

$$\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1\Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2\omega+1=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}\Leftrightarrow (\frac{4}{3})^2+1=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}\Leftrightarrow \frac{25}{9}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega},\ \omega\in(0,\frac{\pi}{2}),$$

άρα $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{3}{5}$ και $\sigma\varphi\omega=\frac{1}{\varepsilon\varphi\omega}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$. Επίσης ισχύει $0<\omega<\frac{\pi}{2}$, άρα

$$\eta\mu\omega=\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\omega}=\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$

γ) Για τις τιμές που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα η συνάρτηση f γίνεται $f(x)=\eta\mu^2x-5\cdot\frac{4}{5}\eta\mu x+5\cdot\frac{3}{5}=\eta\mu^2x-4\eta\mu x+3$. Ζητάμε τις λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0\Leftrightarrow \eta\mu^2x-4\eta\mu x+3=0$ η οποία είναι δευτεροβάθμια εξίσωση με άγνωστο το $\eta\mu x$. Θέτοντας $\eta\mu x=\omega$ παίρνει τη μορφή $\omega^2-4\omega+3=0$ και έχει λύσεις $\omega=1$ ή $\omega=3$. Η δεύτερη από αυτές απορρίπτεται καθώς ισχύει ότι $-1\le\eta\mu x\le 1$. Επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\eta\mu x=1\Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathrm{Z}$

Επομένως τα ζητούμενα σημεία τομής είναι όλα τα σημεία της μορφής $(2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},0)$, $\kappa\in\mathrm{Z}$