ΛΥΣΗ

α) Το άθροισμα των αποστάσεων του σημείου K από τα σημεία Ε(3,0) και Ε΄(-3,0) είναι ίσο με 10. Επίσης $(\mathrm{EE}')=6<10$. Συνεπώς το K κινείται στην έλλειψη C με εστίες τα σημεία Ε και Ε΄ και σταθερό άθροισμα $2\alpha=10$. Είναι $2\alpha=10 \Leftrightarrow \alpha=5$ και $\gamma=3$ οπότε $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2=25-9=16$ και άρα $\beta=4$. Η εξίσωση της C είναι η $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

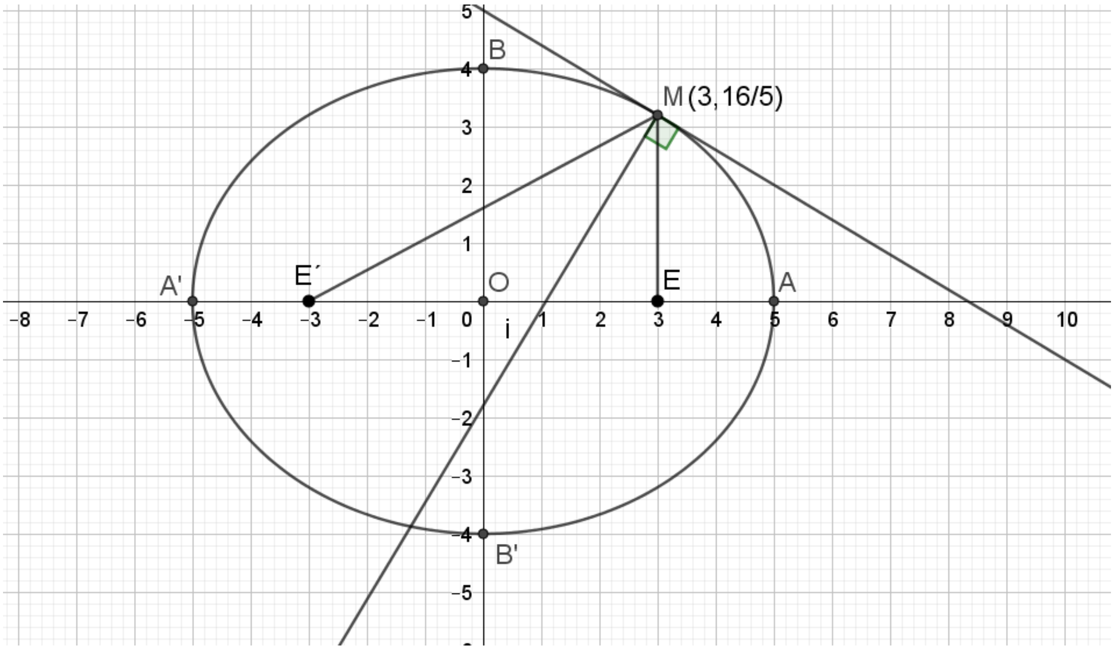
β) Αρκεί να δείξουμε ότι το σύστημα $\begin{cases} \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \\ 3x+5y=25 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση. Από τη 2η εξίσωση έχουμε ότι $y=\frac{25-3x}{5}$ και με αντικατάσταση στην 1η εξίσωση έχουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2}{25}+\frac{\left(\frac{25-3x}{5}\right)^2}{16}=1 \Leftrightarrow \\
&\frac{x^2}{25}+\frac{625-150x+9x^2}{25\cdot 16}=1 \Leftrightarrow \\
&16x^2+625-150x+9x^2=400 \Leftrightarrow \\
&25x^2-150x+225=0 \Leftrightarrow \\
&x^2-6x+9=0 \Leftrightarrow \\
&(x-3)^2=0 \Leftrightarrow \\
&x=3
\end{aligned}$$

Για $x=3$ είναι $y=\frac{25-3\cdot 3}{5}=\frac{16}{5}$, που σημαίνει ότι C και (ε) έχουν ένα μόνο κοινό σημείο $\mathrm{M}(3,\frac{16}{5})$.

γ) Το ότι η ευθεία ε και η έλλειψη C έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το M, γραφικά σημαίνει ότι η ευθεία ε εφάπτεται της έλλειψης C στο σημείο M.

Η έλλειψη C έχει κορυφές τα σημεία $\mathrm{A}(5,0)$, $\mathrm{A}'(-5,0)$, $\mathrm{B}(0,4)$, $\mathrm{B}'(0,-4)$ και φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, όπως και η εφαπτομένη της (ε), που εκτός από το M διέρχεται και από το (0,5).



δ) Από την ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης γνωρίζουμε ότι η διχοτόμος (δ) της γωνίας $\mathrm{E}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{E}'$, είναι η κάθετη της εφαπτομένης στο σημείο M, όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα. Συνεπώς αναζητούμε την κάθετη στην (ε) που διέρχεται από το σημείο M. Η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = -\frac{3}{5}$, οπότε αφού $(\delta) \perp (\varepsilon)$, είναι $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\delta = -1 \Leftrightarrow -\frac{3}{5} \cdot \lambda_\delta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\delta = \frac{5}{3}$. Τελικά η ζητούμενη διχοτόμος (δ) έχει εξίσωση $(\delta): y - y_{\mathrm{M}} = \lambda_\delta \cdot (x - x_{\mathrm{M}}) \Leftrightarrow y - \frac{16}{5} = \frac{5}{3} \cdot (x-3)$.