ΛΥΣΗ

α) Από τον ορισμό της παραβολής, έχουμε ότι ΑΒ = ΑΕ. Αλλά η ΒΕ είναι διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα είναι $BE = \frac{A\Gamma}{2} = EA$.

Ώστε το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισόπλευρο.

β) Γνωρίζουμε ότι η εστία Ε έχει συντεταγμένες $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, άρα είναι $E(1,0)$, αφού $2p = 4$, άρα $p = 2$. Η διευθετούσα έχει εξίσωση $(\delta){:}\, x = -\frac{p}{2} = -1$, άρα η τετμημένη του σημείου Γ θα είναι -1, δηλαδή $x_\Gamma = -1$. Αλλά $x_E = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{x_A + (-1)}{2}$, άρα $x_A = 3$.

Εναλλακτικά, θα είναι $B(-1, y_A)$, οπότε $AB = |x_A - (-1)| = |x_A + 1|$.

Ακόμα $BE = \sqrt{[1-(-1)]^2 + (0 - y_A)^2} = \sqrt{4 + y_A{}^2}$.

Όμως $AB^2 = BE^2 \Leftrightarrow \ (x_A + 1)^2 = 4 + y_A{}^2 \Leftrightarrow x_A{}^2 + 2x_A + 1 = 4 + 4x_A \Leftrightarrow$

$x_A{}^2 - 2x_A - 3 = 0$, εξίσωση που έχει ως ρίζες τους αριθμούς 3 και -1.

Ώστε $x_A = 3$, αφού $x_A > 0$.

Τότε $y_A{}^2 = 12$, άρα $y_A = 2\sqrt{3}$, αφού $y_A > 0$.

γ) Ζητάμε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ, το οποίο όμως είναι ορθογώνιο. Από το α) ερώτημα έχουμε ότι $EA = EB = E\Gamma$, άρα το Ε θα είναι το κέντρο του ζητούμενου κύκλου, ενώ η ακτίνα του θα είναι $AE = AB = |3 - (-1)| = 4$.

Έτσι, ο κύκλος έχει εξίσωση $(x-1)^2 + y^2 = 16$.