ΛΥΣΗ

α)

i. Για να αποδείξουμε ότι τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά αρκεί να δείξουμε ότι $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \not\parallel \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$.

Είναι

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \left(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}\right) = (3-2, -1-1) = (1,-2)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \left(x_{\Gamma} - x_{\mathrm{A}}, y_{\Gamma} - y_{\mathrm{A}}\right) = (-2-2, 0-1) = (-4,-1)$$

και

$$\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1) - (-2)\cdot(-4) = -1-8 = -9$$

Επειδή $\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right) \neq 0$ είναι $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \not\parallel \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ και έπεται το ζητούμενο.

ii. Είναι $\left(\mathrm{AB\Gamma}\right) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right)\right| = \frac{1}{2}\cdot|-9| = \frac{9}{2}$ τ.μ.

β) Το εμβαδό του τριγώνου $\Delta\mathrm{A}\Gamma$ ισούται με

$$\left(\Delta\mathrm{A}\Gamma\right) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}, \overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ x-2 & y-1 \end{vmatrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|-4(y-1) - (-1)(x-2)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|-4y+4+x-2\right| = \frac{1}{2}\left|x-4y+2\right|$$

Επομένως, το $\Delta(x,y)$ είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου, αν και μόνο αν ισχύει

$$\begin{aligned} \left(\Delta\mathrm{A}\Gamma\right) = \left(\mathrm{AB}\Gamma\right) &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|x-4y+2\right| = \frac{9}{2} \\ &\Leftrightarrow \left|x-4y+2\right| = 9 \\ &\Leftrightarrow x-4y+2 = 9 \text{ ή } x-4y+2 = -9 \\ &\Leftrightarrow x-4y-7 = 0 \text{ ή } x-4y+11 = 0 \end{aligned}$$

Άρα, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος αποτελείται από τις ευθείες $x-4y-7=0$ και $x-4y+11=0$.

γ) Είναι ε_1: $x-4y-7=0$ και ε_2: $x-4y+11=0$.

i. Είναι $\lambda_{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{y_{\Gamma} - y_{\mathrm{A}}}{x_{\Gamma} - x_{\mathrm{A}}} = \frac{0-1}{-2-2} = \frac{1}{4}$ και $\lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2} = -\frac{1}{(-4)} = \frac{1}{4}$. Επειδή οι ευθείες ε_1, ε_2 και $\mathrm{A\Gamma}$ έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης είναι μεταξύ τους παράλληλες.

ii. **α τρόπος**

Είναι

$$d(\Gamma,\varepsilon_1)=\frac{|x_\Gamma-4y_\Gamma-7|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}}=\frac{|-2-4\cdot 0-7|}{\sqrt{1+16}}=\frac{9}{\sqrt{17}}=\frac{9\sqrt{17}}{17}$$ μονάδες μήκους,

$$d(\Gamma,\varepsilon_2)=\frac{|x_\Gamma-4y_\Gamma+11|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}}=\frac{|-2-4\cdot 0+11|}{\sqrt{1+16}}=\frac{9}{\sqrt{17}}=\frac{9\sqrt{17}}{17}$$ μονάδες μήκους

και επειδή οι ευθείες ε_1, ε_2 και $\mathrm{A}\Gamma$ είναι μεταξύ τους παράλληλες συμπεραίνουμε ότι ο ισχυρισμός « οι ευθείες $x-4y-16=0$ και $x-4y+20=0$ έχουν ως μεσοπαράλληλο την ευθεία $\mathrm{A}\Gamma$ » είναι αληθής.

β τρόπος

Από το ερώτημα (β) γνωρίζουμε ότι ισχύει $(\Delta\mathrm{A}\Gamma)=(\mathrm{AB}\Gamma)$ μόνο όταν το Δ ανήκει στην ευθεία ε_1 ή στην ευθεία ε_2. Αν επιλέξουμε το Δ να ανήκει στην ευθεία ε_1, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}(\Delta\mathrm{A}\Gamma)=(\mathrm{AB}\Gamma)&\Leftrightarrow\frac{1}{2}\mathrm{A}\Gamma\cdot d(\Delta,\mathrm{A}\Gamma)=\frac{1}{2}\mathrm{A}\Gamma\cdot d(\mathrm{B},\mathrm{A}\Gamma)\\&\Leftrightarrow d(\Delta,\mathrm{A}\Gamma)=d(\mathrm{B},\mathrm{A}\Gamma)\\&\Leftrightarrow d(\varepsilon_1,\mathrm{A}\Gamma)=d(\varepsilon_2,\mathrm{A}\Gamma)\end{aligned}$$

Οπότε, ο ισχυρισμός « οι ευθείες $x-4y-16=0$ και $x-4y+20=0$ έχουν ως μεσοπαράλληλο την ευθεία $\mathrm{A}\Gamma$ » είναι αληθής.