ΛΥΣΗ

α) Έστω $M(0, y)$ ένα τέτοιο σημείο. Ισχύει:

$$\overrightarrow{MA}=(1, 1-y), \overrightarrow{MB}=(2, 4-y)$$

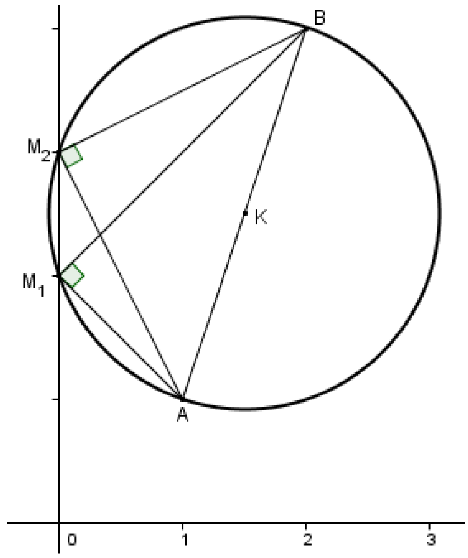
και το τρίγωνο ΜΑΒ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα ΑΒ μόνο όταν ισχύει:

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow (1, 1-y)\cdot(2, 4-y)=0 \Leftrightarrow 2+4-4y-y+y^2=0$$

$$\Leftrightarrow y^2-5y+6=0 \Leftrightarrow y=2 \text{ ή } y=3$$

Επομένως υπάρχουν δυο τέτοια σημεία, τα $M_1(0, 2)$ και $M_2(0, 3)$.

β) Ο κύκλος με διάμετρο ΑΒ έχει κέντρο το μέσο Κ του τμήματος ΑΒ δηλαδή το σημείο $K\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ και η ακτίνα του ρ είναι



$$\rho=\frac{1}{2}(AB)=\frac{1}{2}\sqrt{(2-1)^2+(4-1)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{10}.$$

Άρα η εξίσωση του είναι:

$$C: \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

γ) Θα αποδείξουμε, πρώτα αλγεβρικά, ότι ο κύκλος διέρχεται από τα σημεία $M_1(0, 2)$ και $M_2(0, 3)$.

- Με $x=0$ και $y=2$ στην εξίσωση του κύκλου C έχουμε:

$$\left(0-\frac{3}{2}\right)^2+\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$$

  οπότε το $M_1(0, 2)$ είναι πάνω στον κύκλο C.

- Με $x=0$ και $y=3$ στην εξίσωση του κύκλου C έχουμε:

$$\left(0-\frac{3}{2}\right)^2+\left(3-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$$

  οπότε το $M_2(0, 3)$ είναι πάνω στον κύκλο C.

Γεωμετρικά, οι γωνίες $A\hat{M}_1B$ και $A\hat{M}_2B$ βλέπουν το τμήμα ΑΒ με ορθή γωνία, οπότε σύμφωνα με γνωστό θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας βρίσκονται πάνω στον κύκλο με διάμετρο ΑΒ.