ΛΥΣΗ

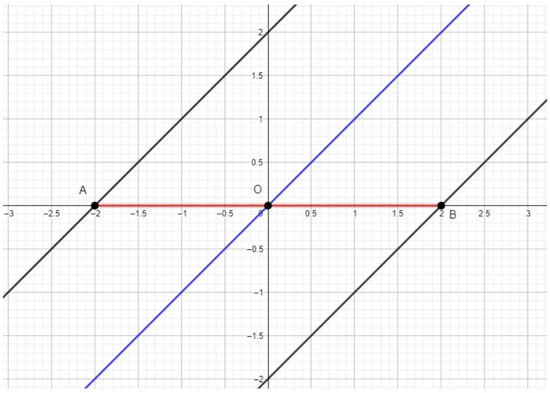
α)

i. Είναι $\varepsilon_1 : y = x + 2$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = 1$ και $\varepsilon_2 : y = x - 2$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = 1$. Είναι $\lambda_1 = \lambda_2$ άρα $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

ii. Είναι $\frac{x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{B}}}{2} = \frac{-2+2}{2} = 0$ και $\frac{y_{\mathrm{A}} + y_{\mathrm{B}}}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$ άρα το μέσο του AB είναι η αρχή των αξόνων $\mathrm{O}(0,0)$.

iii. **α τρόπος**

Είναι γνωστό ότι η μεσοπαράλληλος των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλη προς αυτές και διέρχεται από τα μέσα των τμημάτων που έχουν τα άκρα τους στις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ και διέρχεται από το μέσο $\mathrm{O}(0,0)$ του AB. Η ζητούμενη εξίσωση είναι η $\varepsilon : y = \lambda x \Leftrightarrow y = 1 \cdot x \Leftrightarrow y = x$.



β τρόπος

Το σημείο $\mathrm{M}(x,y)$, είναι σημείο της μεσοπαραλλήλου των ευθειών $\varepsilon_1 : x - y + 2 = 0, \varepsilon_2 : x - y - 2 = 0$ αν και μόνο αν ισχύει $d(M,\varepsilon_1) = d(M,\varepsilon_2)$.

Έτσι, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
& d(M,\varepsilon_1) = d(M,\varepsilon_2) \Leftrightarrow \\
& \frac{|x-y+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|x-y-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} \Leftrightarrow \\
& |x-y+2| = |x-y-2| \Leftrightarrow \\
& x-y+2 = x-y-2 \text{ ή } x-y+2 = -x+y+2 \Leftrightarrow \\
& 2 = -2 \text{ ή } x-y = -x+y \Leftrightarrow \\
& 2x = 2y \Leftrightarrow \\
& y = x
\end{aligned}
$$

Επομένως, η εξίσωση της μεσοπαραλλήλου των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι η $\varepsilon : y = x$.

β)

i. Αφού το κέντρο $\mathrm{K}(x_{\mathrm{K}}, y_{\mathrm{K}})$ του κύκλου (K, ρ) ανήκει στην ευθεία $(\eta): x = \lambda$, θα έχει $x_{\mathrm{K}} = \lambda$. Επιπλέον το κέντρο K είναι το μέσο της απόστασης των δυο εφαπτομένων του κύκλου $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Οπότε ανήκει στη μεσοπαράλληλο τους. Δηλαδή, είναι $y_{\mathrm{K}} = x_{\mathrm{K}} \Leftrightarrow y_{\mathrm{K}} = \lambda$ με $\mathrm{K}(\lambda, \lambda)$.

ii. Είναι $\varepsilon_1 : x - y + 2 = 0$ οπότε η ακτίνα του κύκλου είναι ίση με $\rho = d(\mathrm{K}, \varepsilon_1) = \dfrac{|x_{\mathrm{K}} - y_{\mathrm{K}} + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{|\lambda - \lambda + 2|}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}$, ανεξάρτητη του λ.

Η ζητούμενη εξίσωση για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, είναι η $(x - x_{\mathrm{K}})^2 + (y - y_{\mathrm{K}})^2 = \rho^2 \Leftrightarrow (x - \lambda)^2 + (y - \lambda)^2 = 2$.