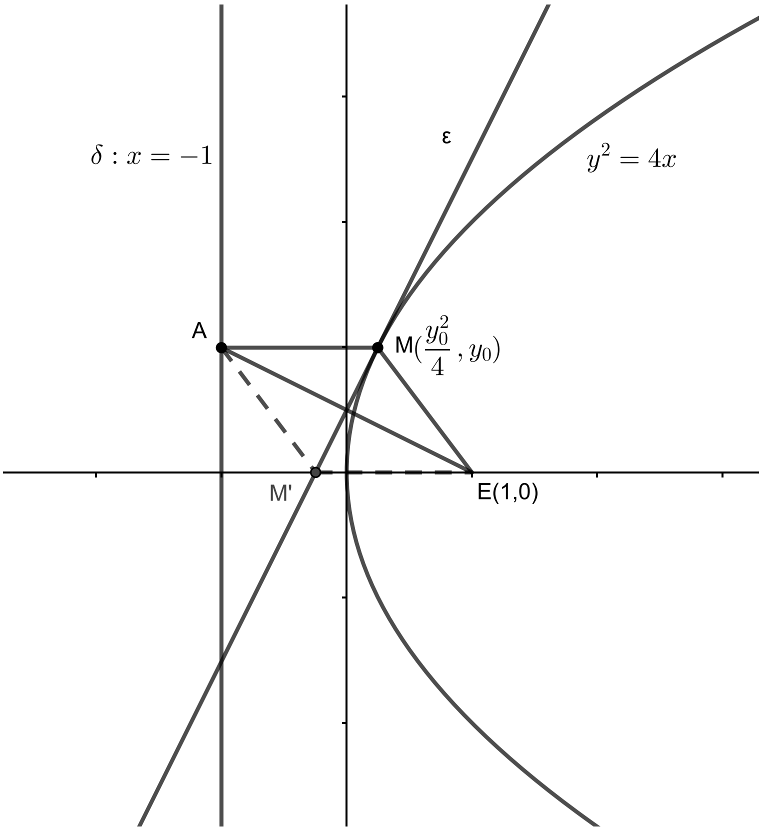
ΛΥΣΗ



α)

i. Το σημείο $M(x_0, y_0)$ είναι σημείο της παραβολής, άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της παραβολής. Δηλαδή $y_0^2 = 4 \cdot x_0$, άρα $x_o = \frac{y_o^2}{4}$.

Επομένως οι συντεταγμένες του M είναι $M(\frac{y_0^2}{4}, y_0)$. Το σημείο A είναι η προβολή του M στη διευθετούσα της παραβολής που είναι η ευθεία (δ): $x = -1$. Άρα $A(-1, y_0)$.

ii. Για το εμβαδό του τριγώνου MAE έχουμε ότι (MAE) = $\frac{1}{2}$ $|\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AE})|$ (1), με $\overrightarrow{AM} = (\frac{y_0^2}{4} + 1, 0)$ και $\overrightarrow{AE} = (1+1, 0-y_0) = (2, -y_0)$.

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AE}) = \begin{vmatrix} \frac{y_0^2}{4} + 1 & 0 \\ 2 & -y_0 \end{vmatrix} = -\frac{y_0^3}{4} - y_0 = \frac{-y_0^3 - 4y_0}{4}.$$

Επειδή (MAE) = $\frac{5}{8}$, η σχέση (1) γίνεται: $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} \left| \frac{-y_0^3 - 4y_0}{4} \right| \Leftrightarrow |y_0^3 + 4y_0| = 5$. Όμως $y_0 > 0$ από την υπόθεση, άρα $y_0^3 + 4y_0 = 5 \Leftrightarrow y_0^3 + 4y_0 - 5 = 0$ (2). Εφαρμόζοντας σχήμα Horner με το 1, αφού το 1 αποτελεί ρίζα της εξίσωσης (2), η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται: $(y_0 - 1)(y_0^2 + y_0 + 5) = 0$. Άρα $y_0 = 1$ η μοναδική λύση της εξίσωσης, αφού το τριώνυμο $y_0^2 + y_0 + 5$ έχει Δ = -19<0 και δεν έχει πραγματικές ρίζες. Επομένως το σημείο Μ είναι το $M(\frac{1}{4}, 1)$.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης ε της παραβολής σε ένα σημείο της (x_1, y_1) είναι: $yy_1 = 2(x + x_1)$. Στο σημείο $M(\frac{1}{4}, 1)$ η παραπάνω εξίσωση γίνεται: $y = 2(x + \frac{1}{4}) \Leftrightarrow 4x - 2y + 1 = 0$. Θέτοντας όπου $y = 0$ έχουμε $x = -\frac{1}{4}$, άρα $M'(-\frac{1}{4}, 0)$.

Για το τμήμα ΑΜ έχουμε: $AM \perp \delta, \delta \perp x'x$, άρα ΑΜ//x'x.

Επίσης (ΑΜ)= $|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{\left(\frac{1}{4} + 1\right)^2} = \frac{5}{4}$ και (ΕΜ΄)=$|1 + \frac{1}{4}| = \frac{5}{4}$. Δηλαδή τα τμήματα ΑΜ και ΕΜ΄ είναι ίσα και παράλληλα, άρα το τετράπλευρο ΑΜΕΜ΄ είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον το Μ είναι σημείο της παραβολής και ισαπέχει από την εστία και τη διευθετούσα, άρα ΜΕ = ΑΜ. Επομένως, το παραλληλόγραμμο έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες, άρα είναι ρόμβος.